Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1974

УДК 538.113

В. В. ЛАЗАРЕВ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ДИАМАГНЕТИКОВ В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Из необходимости существования у диамагнетиков отрицательной на некоторых частотах мнимой части магнитной проницаемости [1] выведены термодинамические ограничения на ее изменения в отрицательной области. Оценки, касающиеся интервала частот, на котором $\mu''(\omega)<0$, показывают, что, видимо, μ'' отрицательна почти всюду в области своего существования. Приведены некоторые требования к установлению намагниченности в диамагнетиках с диэлектрическими свойствами.

§ 1. В работе [1] уже говорилось, что термодинамическое условие положительности тепловых потерь в веществе, находящемся в электромагнитном поле, не приводит к положительности мнимой части магнитной проницаемости.

В самом деле, тепловые потери Q в единичном объеме за единицу времени выражаются формулой [2]

$$Q=\frac{\omega}{8\pi}\left[\varepsilon''(\omega)E_\omega^2+\mu''(\omega)H_\omega^2\right]>0, \tag{1}$$

где ω — частота поля, ε'' и μ'' — мнимые части диэлектрической и магнитной проницаемости, E_ω и H_ω — амплитуды электрического и магнитного полей. В [1] показано, что всегда $\varepsilon''>0$, поэтому μ'' может быть и отрицательной, но при непременном требовании $Q>0$.

Более того, следуя [1], можно показать, анализируя соотношения Крамерса — Кронига [2], что в диамагнетиках $\mu''(\omega)$ неизбежно должна быть отрицательной на некотором интервале частот:

$$\begin{gathered}\mu'(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{x\mu''(x)}{x^2-\omega^2}\,dx+C,\\ \mu''(\omega)=-\frac{2}{\pi}\,\omega\int\limits_0^\infty\frac{\mu'(x)-C}{x^2-\omega^2}\,dx,\end{gathered} \tag{2}$$

где $\mu'(\omega)$ — действительная часть магнитной проницаемости $(\mu(\omega)=\mu'(\omega)-i\mu''(\omega))$. Постоянная C имеет смысл проницаемости на бесконечной частоте, и из физических соображений ее следует положить равной единице [3]. Тогда, записывая первую формулу, из (2) для $\omega=0$ получаем

$$\mu'(0)=\mu_0=1+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mu''(x)}{x}\,dx. \tag{3}$$

Так как статическая проницаемость μ_0 у диамагнетиков меньше 1, то из (3) видно, что $\mu''(\omega)$ не может быть положительной на всех частотах[1].

§ 2. Но из (1) следует, что в отрицательной области $\mu''(\omega)$ может меняться лишь в ограниченном интервале. Для выяснения степени этого ограничения μ'' необходимо, очевидно, рассмотреть условия, в которых соотношение между E_ω и H_ω будет минимальным. Для этого можно, например, поместить образец возможно меньших размеров l (степень их малости будет выяснена ниже) в переменное магнитное поле на оси соленоида. Тогда связь между E_ω и H_ω оценивается из уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

откуда с учетом того, что $|\mu|\sim 1$ в диамагнетиках, $\frac{E_\omega}{l}\sim\frac{\omega}{c}H_\omega$ и

$$E_\omega\sim\omega\tau_p H_\omega, \tag{4}$$

где $\tau_p=\frac{l}{c}$ — время релятивистского запаздывания. Подставляя (4) в (1), получим

$$\mu''(\omega)>-(\omega\tau_p)^2\,\varepsilon''(\omega). \tag{5}$$

В качестве l в (5), очевидно, нужно брать минимальные размеры, при которых еще справедливо проведенное рассмотрение, использующее усреднение внутреннего поля и введение понятия μ. Тогда условие $Q>0$ будет справедливо для тел любых размеров (подчиняющихся описанию в рамках макроскопической электродинамики) и в любых условиях.

Напротив, если в каком-либо веществе $\mu''(\omega)$ не подчинялась бы ограничению (5), то можно было бы, поместив достаточно малый образец из этого вещества в описанные или аналогичные[2] условия, получить отрицательные тепловые потери, что противоречит второму началу термодинамики.

Итак,

$$l\sim(100\div1000)\,d, \tag{6}$$

где $d\sim10^{-8}$ *см* — атомные размеры.

Таким образом, параметр τ_p в (5) с учетом (6) должен быть порядка

$$\tau_p\sim(3\cdot10^{-17}\div3\cdot10^{-16})\ \textit{сек}. \tag{7}$$

---

[1] В [1] этот вывод делается из рассмотрения аналогичных (2) дисперсионных соотношений между компонентами величины $1/\mu$, а не μ.

[2] В образце, вращающемся вокруг своей оси в перпендикулярном ей постоянном магнитном поле или находящемся в узле электрического поля стоячей электромагнитной волны (при условии: l много меньше длины волны), поля связаны аналогично (4).

§ 3. Магнитная проницаемость имеет смысл и отличные от единицы значения на ограниченной полосе частот. Как известно [2], это связано с тем, что на больших частотах магнитный момент тела определяется в основном не вектором намагниченности $\vec{M}$, а токами поляризации и проводимости $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$. На малых частотах в уравнении Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\left(c\operatorname{rot}\vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right)$$

можно пренебречь токами $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ по сравнению с $c\operatorname{rot}\vec{M}$, что и приводит к преобразованию интеграла, определяющего магнитный момент тела

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2c}\int_v [\vec{r}, \vec{j}]\,dV$$

в

$$\vec{\mathcal{M}} = \int_v \vec{M}\,dV.$$

Но на больших частотах условие

$$\left|\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right| \ll c\,|\operatorname{rot}\vec{M}| \tag{8}$$

все сильнее нарушается, а в оптической области уже заведом несправедливо [2], и μ с большой точностью можно считать единицей (т. е. $\mu''=0$).

В различных условиях (8) нарушается по-разному быстро. Но наиболее благоприятными для его выполнения будут условия, уже описанные в предыдущем параграфе, при которых образец минимальных размеров l помещается в переменное магнитное поле на оси соленоида. В этом случае для диамагнетиков (8) преобразуется [2]

$$\omega\sqrt{\left|\frac{\varkappa}{\chi}\right|} \ll \frac{1}{\tau_p}, \tag{9}$$

где $\varkappa$ и χ — соответственно диэлектрическая и магнитная восприимчивости, τ_p — из (7).

Естественно определить частоту ω_1, в окрестности которой в любых условиях μ теряет смысл и за которой полагается единицей, из соотношения

$$\omega_1\sqrt{\left|\frac{\varkappa(\omega_1)}{\chi(\omega_1)}\right|} = \frac{1}{\tau_p}. \tag{10}$$

Таким образом, и интегрирование в (2) и (3) разумно производить не до ∞, а до частоты, близкой к ω_1.

Сравним ω_1 с частотой, до которой $\mu''(\omega)$ должна быть отрицательной, чтобы с учетом (5) получить в (3) величину μ_0.

В выражении

$$\mu_0 = 1 + \frac{2}{\pi}\int_0^{\omega_{\text{гр}}} \frac{F(x)}{x}\,dx, \tag{11}$$

где $F(\omega) = -(\omega\tau_p)^2\varepsilon''(\omega)$ (правая часть (5)), определим $\omega_{\text{гр}}$.

Если диамагнетик обладает проводящими свойствами, то

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{4\pi\sigma}{\omega} \tag{12}$$

(σ — проводимость), и из (11) получаем

$$\omega_{\text{гр}}^{(1)} = \frac{\pi}{2} \frac{(-\chi_0)}{\sigma\tau_p^2} \tag{13}$$

$\left(\chi_0 = \frac{\mu_0 - 1}{4\pi} \text{ — статическая восприимчивость}\right)$.

Если $\varepsilon''(\omega)$ соответствует диэлектрическим свойствам, то, как показывает множество опытов, вдали от области резонансной абсорбции (которая обычно находится на оптических частотах и поэтому здесь не рассматривается) $\varepsilon''(\omega)$ у большинства диэлектриков практически не меняется (см. [4, 5]). Поэтому в (11) можно положить $\varepsilon'' = \text{const}$, откуда

$$\omega_{\text{гр}}^{(2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\tau_p} \sqrt{\frac{-\chi_0}{\varkappa''}}, \tag{14}$$

где $\varkappa'' = \frac{\varepsilon''}{4\pi}$.

Если ту же операцию провести для определения ω_1 из (10), то получим:

в случае проводника

$$|\varkappa(\omega)| = \varkappa''(\omega) = \frac{\sigma}{\omega} \tag{15}$$

и

$$\frac{\omega_1^{(1)}}{|\chi(\omega_1^{(1)})|} = \frac{1}{\sigma\tau_p^2}. \tag{16}$$

В случае диэлектрика $|\varkappa| = \text{const}$ и

$$\frac{\omega_1^{(2)}}{\sqrt{|\chi(\omega_1^{(2)})|}} = \frac{1}{\tau_p\sqrt{|\varkappa|}}. \tag{17}$$

Так как ω_1 находится в области, где $|\chi|$ спадает к нулю, можно считать, что во всяком случае $|\chi(\omega_1^{(1-2)})| \leqslant -\chi_0$, и из сравнения (13) с (16), а (14) с (17) заключить, что $\omega_{\text{гр}} \sim \omega_1$, т. е., что в диамагнетиках $\mu''(\omega)$ отрицательна почти всюду в области своего существования. Из отрицательности интеграла в (3) можно сделать вывод, что в положительной области значения $\mu''(\omega)$ могут существенно превосходить модуль правой части (5) лишь на узкой полосе частот. А это характеризовало бы резонансное поглощение энергии, не обнаруженное в диамагнетиках. Таким образом, у диамагнетиков на преобладающей части частот $\mu''(\omega) < 0$, а значения ее в положительной области вряд ли существенно превосходят отрицательные, подчиняющиеся ограничению (5).

Замечание. Формулы (12) и (15) справедливы в приближении

$$\omega\tau^* \ll 1, \tag{18}$$

где τ^* — среднее время соударения электронов проводимости с решеткой

$$\tau^* = \frac{m\sigma}{Ne^2}, \tag{19}$$

m, e — масса и заряд электрона, N — плотность свободных электронов (см., например, [6]). Легко убедиться, подставляя в (13) и (16) типичные значения χ_0 и N, что $\omega_{\text{гр}}^{(1)}$ и $\omega_1^{(1)}$ не противоречат (18).

§ **4.** Точная зависимость $F(\omega)$ (см. (11)), ограничивающая $\mu''(\omega)$, зависит от вида $\varepsilon''(\omega)$, который специфичен для разных веществ. Тем не менее поведение $F(\omega)$ при малых частотах можно определить.

В самом деле, у диэлектриков $\varepsilon''(\omega) \sim \omega$ около нуля [4, 5]. Тем самым $F(\omega)$ ведет себя на малых частотах как ω^3.

Как уже указывалось в (12), у проводников $\varepsilon''(\omega) \sim \frac{1}{\omega}$ и в этом случае $F(\omega) \sim \omega$ около нуля.

Поведение $F(\omega)$ на малых частотах в первом случае дает некоторые сведения о характере установления намагниченности у диамагнетиков с диэлектрическими свойствами.

Разложим функцию $\chi''(\omega) = \frac{\mu''(\omega)}{4\pi}$ в ряд Тейлора около нуля. В силу нечетности $\chi''(\omega)$, в разложение войдут лишь нечетные степени ω:

$$\chi''(\omega) = \left.\frac{d\chi''}{d\omega}\right|_{\omega=0} \omega + \frac{1}{6} \left.\frac{d^3\chi''}{d\omega^3}\right|_{\omega=0} \omega^3 + \dots .$$

Если у диэлектриков $\chi''(\omega)$ отрицательна на малых частотах, то в этом разложении отсутствует первый член, что следует из поведения $F(\omega)$ около нуля. $\chi''(\omega)$ может вести себя как ω в окрестности нуля, лишь если она положительна. Таким образом, у диэлектриков

$$\left.\frac{d\chi''}{d\omega}\right|_{\omega=0} \geqslant 0. \tag{20}$$

Известно, далее [3], что функция $\chi(\omega)$ связана Фурье-преобразованием с производной по времени от намагниченности после наложения поля в виде скачка $\vartheta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$

$$\chi(\omega) = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dM_\vartheta}{dt} e^{-i\omega t}\, dt, \tag{21}$$

где $M_\nu(t)$ — намагниченность, наводимая полем вида

$$H(t) = H_0 \vartheta(t).$$

Из (21) следует, что

$$\chi''(\omega) = \int_0^\infty \frac{d\chi_\vartheta}{dt} \sin \omega t\, dt, \tag{22}$$

где

$$\chi_\vartheta(t) = \frac{1}{H_0} M_\vartheta(t).$$

Очевидно, что $\chi_\vartheta(0)=0$ из-за невозможности бесконечно быстрой реакции на изменение поля; $\chi_\vartheta(\infty)=\chi_0$ (статической проницаемости).

Из (22) получаем

$$\left.\frac{d\chi''}{d\omega}\right|_{\omega=0}=\int\limits_0^\infty t\,\frac{d\chi_\vartheta}{dt}\,dt=$$

$$=-\int\limits_0^\infty t\,\frac{d(\chi_0-\chi_\vartheta)}{dt}\,dt=-t\,[\chi_0-\chi_\vartheta(t)]\Big|_0^\infty+\int\limits_0^\infty[\chi_0-\chi_\vartheta(t)]\,dt.$$

Если считать, что на бесконечности разность $\chi_0-\chi_\vartheta(t)$ убывает быстрее, чем $1/t$, что физически правдоподобно, то первый член обращается в нуль и

$$\left.\frac{d\chi''}{d\omega}\right|_{\omega=0}=\int\limits_0^\infty[\chi_0-\chi_\vartheta(t)]\,dt.$$

Таким образом, условие (20) означает, что

$$\int\limits_0^\infty[\chi_0-\chi_\vartheta(t)]\,dt\geqslant 0. \tag{23}$$

Легко видеть, что (23) не может быть реализовано, если намагниченность устанавливается монотонно во времени (из-за того, что $\chi_0<0$, см. рис. 1), качественный вид $\chi_\vartheta(t)$ в трех возможных вариантах представлен на рис. 2. Условие (23) означает, что площади между кривой $\chi_\vartheta(t)$ и линией χ_0 над и под последней либо равны друг другу, либо площадь под линией χ_0 больше.

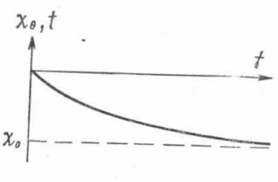

Рис. 1

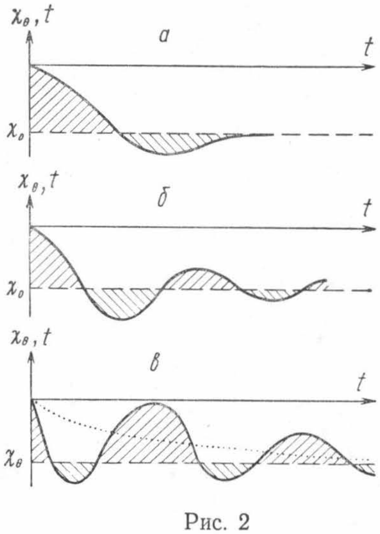

Рис. 2

В заключение выражаю искреннюю признательность В. Б. Брагинскому за предоставление темы этого рассмотрения и неоднократные обсуждения изложенных выводов, а также Н. Б. Брандту, М. И. Каганову и В. М. Четверикову за ряд полезных дискуссий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Силин В. Г., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., 1961.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., 1957.

3. Сликтер Ч. Основы теории магнитного резонанса. М., 1967.
4. Сканави Г. И. Физика диэлектриков. Область слабых полей. М. — Л., 1949.
5. Браун В. Диэлектрики. М., 1961.
6. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике, вып. 7. М., 1966.

Поступила в редакцию
11.4 1972 г.

Кафедра физики
низких температур