Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1974

УДК 539.1

Л. Н. ШЕХАТА

СТРУКТУРА СМЕШАННОГО СОСТОЯНИЯ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ (ВТОРОГО РОДА) ПЛАСТИНКИ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Доказано, что решетка вихревых нитей, образованная в сверхпроводящей (второго рода) пластинке конечной толщины, почти не деформируется. Вычислены термодинамический потенциал Гиббса; максимальное и минимальное значения внешнего магнитного поля, при которых смешанное состояние с данным значением индукции еще может существовать; максимальный критический ток и усредненное микроскопическое поле (т. е. индукция).

Введение

В работе [1] была рассмотрена структура смешанного состояния вблизи границы полубесконечного сверхпроводника второго рода. Было показано, что при определенном расположении относительно границы решетка вихревых нитей почти не деформируется. Были определены также максимальное $H_{\max}(B)$ и минимальное $H_{\min}(B)$ значения внешнего поля, при которых смешанное состояние с данным значением индукции еще может существовать.

В настоящей статье рассмотрен более реальный случай: смешанное состояние в пластинке конечной толщины, помещенной во внешнее магнитное поле H_c, параллельно ее поверхности ($H_{c1} \ll H_e \ll H_{c2}$). Обосновано предположение о том, что решетка вихревых нитей вблизи поверхностей пленки не деформируется. В [1], например, строгого доказательства этого положения дано не было. В данной статье определяются абсолютные границы устойчивости смешанного состояния. Кроме того, показано, что $H_{\min}(B)$ и $H_{\max}(B)$ (см. [2]) для вихревой решетки в пластинке совпадают с соответствующими величинами для случая полубесконечного образца. Вычислены также термодинамический потенциал Гиббса G, равновесное значение усредненного магнитного поля и максимальный критический ток. Эти результаты отличаются от полученных ранее в [1 и 3]. Авторы этих работ недостаточно последовательно учитывали эффекты, обусловленные взаимодействием вихревых нитей с границами образца.

Локальное равновесие

Выведем и решим уравнения локального равновесия для системы вихревых нитей в пластинке. Предположим, что пластинка из идеального сверхпроводника второго рода с $\varkappa \gg 1$, толщина которой $d \gg \xi = \lambda/\varkappa$ ($\varkappa$ — параметр теории Гинзбурга — Ландау, λ — глубина проникновения слабого магнитного поля) при $H_{\text{ст}} \ll H_e \ll H_{c2}$, помещена во внешнее магнитное поле H_e, параллельное поверхности. (Будем пользоваться системой координат, ось z которой направлена вдоль H_e, а боковые поверхности пластинки есть плоскости $x=0$ и $x=d$.) Нити располагаются параллельно границам образца достаточно длинными и прямыми линиями. Каждая нить описывается двумя индексами m и n, где m — номер слоя$=1, 2, \ldots M$ (M — число слоев), n — номер ряда$=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. В дальнейшем будем считать, что число слоев $M \gg 1$. Случай, когда в пластинке образовалась одна нить, был рассмотрен ранее в [4 и 5]. Расстояние каждого слоя $x = x_m$ отсчитывается от границы пластинки $x=0$. Тогда расстояние последнего слоя от той же границы есть x_M или x_1' от границы $x=d$. Так что толщина пластинки

$$d = x_M + x_1'. \tag{1}$$

В слоях $x = x_m$ для любого m расстояние между соседними нитями одинаково, т. е. y-компонент центра нити (m, n) есть

$$y_{mn} = \left(n + \frac{m}{2}\right) a, \tag{2}$$

где a — постоянная. Вдалеке от границ расстояния между соседними слоями также должны быть одинаковыми, т. е.

$$x_m - x_{m-1} = b, \quad 1 \ll m \ll M, \tag{3}$$

где b — постоянная. Согласно работе [2] существует расположение вихревых нитей относительно границы, при котором деформация решетки минимальна. При этом $b = a\sqrt{3}/2$ и равенствами (2) и (3) определяется треугольная решетка с периодом, равным a. В [2] было также показано, что этому случаю соответствует наименьшая поверхностная энергия. Поэтому следует ожидать, что именно такое расположение вихревых нитей относительно границы должно осуществляться в пластинке конечной толщины. Будем использовать обозначение:

$$B = \varphi_0/ab, \tag{4}$$

где $\varphi_0 = hc/2e$ — квант потока. Следует, однако, подчеркнуть, что в пластинке конечной толщины величина B, строго говоря, отличается от индукции (см. ниже).

При равновесии в центре каждой нити имеют место следующие условия [2]:

$$\partial h/\partial y = 0, \quad \partial h/\partial x = 0. \tag{5}$$

Здесь $h = h_z$ — напряженность магнитного поля внутри сверхпроводника. Производные от магнитного поля должны вычисляться при фиксированных положениях всех нитей.

Для сверхпроводников с $\varkappa \gg 1$ вихревое состояние в области полей $H_e \ll H_{c_2}$ описывается с помощью модифицированного уравнения Ф. и Г. Лондонов,

$$h - \lambda^2 \Delta h = \varphi_0 \sum_{m,n} \delta(x - x_m)\, \delta(y - y_{mn}). \tag{6}$$

Граничные условия при $x=0$ и $x=d$ для решения уравнения (6) можно написать в виде:

$$h(0) = H_1, \quad h(d) = H_2, \tag{7}$$

где H_1 и H_2 — значения магнитного поля на боковых поверхностях пластинки. (В дальнейшем все величины, имеющие размерность длины, будут выражаться в единицах λ; причем $d/\lambda = \delta$, $b/\lambda = \beta$, $a/\lambda = \alpha$, а величина x/λ будет по-прежнему обозначаться через x.)

Решение уравнения (6) можно представить как сумму

$$h(x, y) = h_L(x) + h_v(x, y), \tag{8}$$

где

$$h_L(x) = (H_1 \operatorname{sh}(\delta - x) + H_2 \operatorname{sh} x)/\operatorname{sh}\delta, \tag{9}$$

$h_v(x, y)$ есть решение уравнения (6) с условиями

$$h_v(0) = h_v(d) = 0.$$

Оно представляет собой поле, создаваемое всеми вихревыми нитями и их изображениями в точке (x, y), т. е.

$$h_v(x, y) = \sum_{m=1}^{M} h_{vm}(x, y), \tag{10}$$

где

$$h_{vm}(x, y) = \frac{\varphi_0}{2\pi\lambda^2} \sum_{n,s=-\infty}^{+\infty} [K_0([(2s\delta + x_m - x)^2 + (y_{mn} - y)^2]^{1/2}) - K_0([(2s\delta - x_m - x)^2 + (y_{mn} - y)^2]^{1/2})]. \tag{11}$$

($K_0(r)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.)

Используя (8), нетрудно убедиться, что первая группа условий равновесия в (5) выполняется при любых значениях x_m, благодаря выбранному (2) регулярному расположению вихревых нитей во всех плоскостях $x = x_m$.

Прежде чем перейти к анализу второй группы условий равновесия (5), сделаем ряд замечаний, касающихся структуры выражения (11).

Обозначим

$$h_{vm}(x, y) = h_{0m}(x, y) + h_{1m}(x, y), \tag{11a}$$

где

$$h_{0m}(x, y) = \frac{\varphi_0}{2\pi\lambda^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_0([(x - x_m)^2 + (y - y_{mn})^2]^{1/2}),$$

а $h_{1m} = h_{vm} - h_{0m}$. Величина h_{0m} есть магнитное поле линейной цепочки параллельных друг другу вихревых нитей в безграничном сверхпроводнике. С помощью метода суммирования, аналогичного использованному в [3], находим

$$h_{0m}(x, y) = -\left(\frac{\varphi_0}{4\pi\lambda^2}\right)\ln\left[1 - 2(-1)^m \cos\frac{2\pi y}{\alpha}\exp(-2\pi\,|x - x_m|/\alpha) + \right.$$

$$\left. + \exp(-4\pi\,|x - x_m|/\alpha)\right] + \left(\frac{\varphi_0}{2\alpha\lambda^2}\right)\exp(-|x - x_m|); \qquad (11б)$$

при $x \to x_m$, $y \to y_{mn}$ это выражение неограниченно возрастает, что связано с неприменимостью уравнения (6) на расстояниях $\xi = \lambda/\varkappa$ от оси вихревой нити. Эта расходимость может быть устранена так же, как это делается в случае уединенной вихревой нити (см. [1, 6]). А именно, полагаем

$$h_{vm}(x_m, y_{mn}) = \frac{\varphi_0}{2\alpha\lambda} K_0(1/\varkappa) + \lim_{x \to x_m}\left(h_{0m}(x, y_{mn}) - \frac{\varphi_0}{2\pi\lambda^2} K_0(|x - x_m|)\right) =$$

$$= \frac{\varphi_0}{2\alpha\lambda^2} + \frac{\varphi_0}{2\pi\lambda^2}\ln(\alpha/2\pi\varkappa). \qquad (11в)$$

Ток, обтекающий уединенную вихревую нить, обращается в нуль в ее центре. Чтобы учесть это, достаточно положить

$$\lim_{\substack{x \to x_m \\ y \to y_{mn}}} \frac{\partial h}{\partial x} = \lim_{\varepsilon \to 0}(1/2)\left[\left(\frac{\partial h_{vm}}{\partial x}\right)_{\substack{x = x_m - \varepsilon \\ y = y_{mn}}} + \left(\frac{\partial h_{vm}}{\partial x}\right)_{\substack{x = x_m + \varepsilon \\ y = y_{mn}}}\right].$$

Эти правила всегда будут в случае необходимости использоваться в дальнейшем.

Выражение (11) содержит сумму по s величин типа (11б). Сумма экспоненциальных факторов вычисляется точно, а при суммировании логарифмических членов следует учесть, что $\delta/\alpha \approx M \gg 1$. В результате получаем:

$$h_{vm} = h_{vm}^{(0)} + h_{vm}^{(1)}, \qquad (12)$$

где

$$h_{vm}^{(0)} = \begin{cases} (\varphi_0/\alpha\lambda^2)(\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(\delta - x_m)/\operatorname{sh}\delta); & 0 < x < x_m \\ (\varphi_0/\alpha\lambda^2)(\operatorname{sh}(\delta - x)\operatorname{sh} x_m/\operatorname{sh}\delta), & x_m < x < \delta \end{cases}$$

$$h_{vm}^{(1)} = \frac{\varphi_0}{4\pi\lambda^2}\ln\frac{1 - 2(-1)^m\cos\frac{2\pi y}{\alpha}\exp(-2\pi\,|x + x_m|/\alpha) + \exp(-4\pi\,|x + x_m|/\alpha)}{1 - 2(-1)^m\cos\frac{2\pi y}{\alpha}\exp(-2\pi\,|x - x_m|/\alpha) + \exp(-4\pi\,|x - x_m|/\alpha)}.$$

Выражение для $h_{vm}^{(1)}$ выписано для случая, когда $x_m \sim x_1$. Если $x_m \sim \delta$, следует сделать замену $|x_m + x| \to |x_m + x - 2\delta|$.

При $x \to x_m$, $y \to y_{mn}$ из (12) (с учетом (11в)) находим

$$h_{vm}(x_m, y_{mn}) = (\varphi_0/\alpha\lambda^2)\,(\operatorname{sh} x_m \operatorname{sh}(\delta - x_m)/\operatorname{sh}\delta) +$$

$$+ (\varphi_0/2\pi\lambda^2)\ln(\alpha\,[1 - \exp(-4\pi x_m/\alpha)]/2\pi\varkappa) \qquad (13)$$

(если $x_m \to \delta$ следует заменить $x_m \to \delta - x_m$).

Вводя среднее магнитное поле H_0 и магнитное поле транспортного тока J таким образом, что

$$H_1 = H_0 - J, \quad H_2 = H_0 + J, \qquad (14)$$

и используя соотношения (10)—(12), вторую группу условий равновесия в (5) можно представить в виде

$$\frac{\varphi_0}{2\alpha\lambda^2}\left[\sum_{m=1}^{\mu-1}\operatorname{sh}(\delta+x_m-x_\mu)-\sum_{m=\mu+1}^{M}\operatorname{sh}(\delta-x_m+x_\mu)-\right.$$

$$\left.-\sum_{m=1}^{M}\operatorname{sh}(\delta-x_m-x_\mu)\right]=H_0\operatorname{sh}(\delta/2)\operatorname{sh}\left(\frac{\delta}{2}-x_\mu\right)+$$

$$+J\operatorname{ch}\frac{\delta}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{\delta}{2}-x_\mu\right),\quad \mu=1,2,\ldots M. \tag{15}$$

При выводе этой системы уравнений были опущены слагаемые порядка

$$\exp[-2\pi|x_\mu\pm x_m|/\alpha]\sim\exp[-\pi|\mu\pm m|\sqrt{3}],$$

т. е. при вычислении производных полагалось $h_{vm}=h_{vm}^{(0)}$.

Покажем, что точное решение системы уравнений (15) есть

$$x_\mu=x_1+\beta(\mu-1),\quad \mu=1,2,\ldots,M, \tag{16}$$

где β и x_1 определяются уравнениями (21)—(23).

Для этого заметим, что если к уравнению (15) прибавить (или вычесть) такое же уравнение, соответствующее слою с номером $M-\mu+1$, и воспользоваться выражением (16), то после выполнения суммирования по m индекс μ из получившихся соотношений исчезает. Тогда можно записать следующие два уравнения:

$$H_0\operatorname{sh}(\delta/2)\operatorname{sh}\Delta+J\operatorname{ch}(\delta/2)=\frac{\widetilde{B}}{2}\operatorname{sh}(\beta M/2)\operatorname{sh}(2\Delta), \tag{17}$$

$$H_0\operatorname{sh}(\delta/2)\operatorname{ch}\Delta+J\operatorname{ch}(\delta/2)\operatorname{sh}\Delta=$$

$$=\widetilde{B}\left(\operatorname{sh}(\delta/2)\operatorname{ch}\left(\delta-\frac{\beta M}{2}\right)+\operatorname{sh}(\beta M/2)\operatorname{sh}^2\Delta\right), \tag{18}$$

где

$$\widetilde{B}=\varphi_0/2\alpha\lambda^2\operatorname{sh}(\beta/2)=\beta B/2\operatorname{sh}(\beta/2), \tag{19}$$

$$2\Delta=x_1-x_1', \tag{20}$$

$$\delta=x_1+x_1'+\beta(M-1). \tag{21}$$

Уравнения (17) и (18) можно преобразовать к более удобному виду:

$$H_0-J=H_1=\widetilde{B}\operatorname{ch}\left(x_1-\frac{\beta}{2}\right), \tag{22}$$

$$H_0+J=H_2=\widetilde{B}\operatorname{ch}\left(x_1'-\frac{\beta}{2}\right). \tag{23}$$

Таким образом, мы доказали, что в рассматриваемом приближении деформация решетки вихревых нитей отсутствует (см. (16)), а расстояния первого и последнего слоев вихревых нитей до ближайших границ образца определяются такими же уравнениями (22) и (23), как в случае сверхпроводника, занимающего полупространство (см. [2]).

Если $H_1=H_2$ (т. е. ток в пластинке отсутствует), величина $\Delta=(x_1-x_1')/2$ обращается в нуль.

При наличии тока $x_1 \neq x_1'$. Используя уравнения (17) и (18), получим

$$\operatorname{th}\Delta = -(H_1 - H_2)/([H_1^2 - \widetilde{B}^2]^{1/2} - [H_2^2 - \widetilde{B}^2]^{1/2}), \tag{24}$$

причем расстояния между соседними слоями вихревых нитей (т. е. величина β) изменяются, оставаясь, однако, одинаковыми. Этот на первый взгляд малый эффект при вычислении величины Δ оказывается очень существенным. Если предположить, как это сделано в [2], что при увеличении тока величина β не меняется (т. е. решетка вихревых нитей является абсолютно жесткой), смещение Δ оказывается значительно большим, чем следует из (24).

Макроскопическое равновесие

Если выполнены условия локального равновесия (5), потенциал Гиббса нашей системы имеет относительный минимум. При отсутствии тока величину M (а, значит и параметры a, b и B) можно выбрать так, чтобы потенциал Гиббса имел абсолютный минимум. Такое состояние называется макроскопическим равновесным. Потенциал G при этом дается выражением [1, 2, 4]

$$G = \frac{\varphi_0 lY}{8\pi a} \sum_{\mu=1}^{M} (h_v(x_\mu) + 2h_L(x_\mu) - 2H_e), \tag{25}$$

где l — длина нити и Y — длина образца вдоль оси y.

Используя (9), (10) и (16), нетрудно определить $h_v(x_\mu)$ и $h_L(x_\mu)$. Выполняя затем суммирование по μ в (25), получаем

$$G = (\varphi_0 lY/8\pi\alpha\lambda)\left[\left(\varphi_0 M \operatorname{cth}\frac{\beta}{2}\Big/2\alpha\lambda^2 - 2M(H_e - H_{c1}^*) + \right.\right.$$
$$+ (\varphi_0/\alpha\lambda^3 \operatorname{sh}^2\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{sh}\delta\Big)\left(\operatorname{sh}\frac{\beta M}{2}\operatorname{sh}\frac{\delta}{2}\operatorname{ch}\left(\delta - \frac{\beta M}{2}\right) + \right.$$
$$\left.+\left(2H_e\operatorname{sh}\frac{\beta M}{2}\right)\Big/\left(\operatorname{ch}\frac{\delta}{2}\operatorname{sh}\frac{\beta}{2}\right)\right], \tag{26}$$

где

$$H_{c1}^* = \frac{\varphi_0}{4\pi\lambda^2}\left[\ln(\alpha/2\pi\varkappa) - 2\sum_{k=1}^{\infty}(1/k(1-(-1)^k\exp(2\pi k\beta/\alpha)))\right] \tag{27}$$

Система вихревых нитей находится в макроскопическом равновесии, если

$$dG/dM = 0. \tag{28}$$

Используя (26), нетрудно убедиться, что $\left(\frac{\partial G}{\partial\beta}\right)_M = 0$, если выполнено уравнение (18). Поэтому

$$\frac{dG}{dM} = (\partial G/\partial M)_\beta + (\partial G/\partial\beta)_M\cdot(\partial\beta/\partial M) = \left(\frac{\partial G}{\partial M}\right)_\beta = 0. \tag{29}$$

Это уравнение приводится к виду

$$2(H_e - H_{c1}^*) = \widetilde{B}\left(\operatorname{ch}\frac{\beta}{2} + \beta/2\operatorname{sh}\frac{\beta}{2}\right), \tag{30}$$

откуда с точностью до слагаемых порядка $\beta^4 B$ находим

$$B = \varphi_0/ab = H - H_{c1}^*. \tag{31}$$

Если выражение (27) для H_{c1}^* переписать в виде

$$H_{c1}^* = (\varphi_0/4\pi\lambda^2)\ln(\beta'\alpha/\varkappa), \tag{32}$$

то для случая, когда $b = a\sqrt{3}/2$, который мы рассматриваем:

$$\ln\beta' = -\ln 2\pi - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(1-(-1)^k\exp(\pi k\sqrt{3})\right) \approx -1{,}847.$$

Этот результат совпадает с полученным ранее (см. [3]).

Следует, однако, отметить, что в пластинке конечной толщины величина B, строго говоря, отличается от индукции, которую принято определять, как усредненное микроскопическое поле, т. е.

$$\langle h\rangle = \frac{1}{d}\lim_{Y\to\infty}\frac{1}{Y_0}\int_0^{\delta}dx\int_{-Y/2}^{+Y/2}dy h(x, y).$$

Используя выражения (8)—(12), находим

$$\langle h\rangle = B\left[1+\frac{2}{\delta}\left(\left(\beta\,\mathrm{sh}\left(x_1-\frac{\beta}{2}\right)\Big/2\,\mathrm{sh}\frac{\beta}{2}\right)-\left(x_1-\frac{\beta}{2}\right)\right)\right]. \tag{33}$$

Как и должно быть, при $\delta\to\infty$

$$\langle h\rangle = B = \varphi_0/ab.$$

Отличие величины $<h>$ от B во всех случаях весьма мало; оно гораздо меньше, чем следует из результатов работы [3], авторы которой не учитывали эффектов, связанных с конечностью расстояния первого слоя вихревых нитей от поверхности.

Вычислим величину потенциала Гиббса при макроскопическом равновесии. Используя для вычисления выражения (26) уравнение (30), находим

$$G = -\frac{\widetilde{B}^2 lYMb}{8\pi}\left[1-\frac{\mathrm{sh}\dfrac{\beta M}{2}\,\mathrm{ch}\dfrac{\beta M-\delta}{2}}{\dfrac{\beta M}{2}\,\mathrm{ch}(\delta/2)}\right]. \tag{34}$$

При $\delta\to\infty$ это выражение совпадает с известным [6]

$$G = -VB^2/8\pi, \tag{34а}$$

где $V = lYd$ — объем образца.

Если же $\delta\to 0$ (но $\delta/\alpha \gg 1$), получаем

$$G = -\frac{B^2 V}{8\pi}\left[(\delta^2/12)-\left(x_1-\frac{\beta}{2}\right)^2\right]. \tag{34б}$$

Поскольку всегда $\mathrm{ch}\left(x_1-\dfrac{\beta}{2}\right)\geqslant 1$, локально равновесные состояния вихревых нитей могут существовать (см. уравнения (22) и (23)), лишь если $H_1 > H_{\min}(B)$ и $H_2 > H_{\min}(B)$, где

$$H_{\min}(B) = \widetilde{B} \simeq B\left(1 - \left(\frac{\beta^2}{24}\right)\right). \tag{35}$$

Более точное определение величины $H_{\min}(B)$ дано в работе [2]. При $H_e = H_{\min}(B)$ исчезает поверхностный потенциальный барьер [7], удерживающий вихревые нити внутри сверхпроводника. Этот же самый поверхностный барьер мешает вихревым нитям входить в образец, пока его максимум не приблизится (при увеличении внешнего поля) на расстояние порядка $\xi(T)$ к поверхности. Соответствующее значение внешнего поля мы обозначаем $H_{\max}(B)$. Величина $H_{\max}(B)$ для пластинки при $M \gg 1$ оказывается такой же, как и в случае сверхпроводника, занимающего полупространство (см. [1]). Поэтому мы не приводим здесь соответствующих довольно громоздких вычислений. Результат есть

$$H^2_{\max}(B) = \widetilde{B}^2 + \left(H_s + \frac{\varphi_0}{2\alpha\lambda}\right)^2. \tag{36}$$

Максимальный критический ток для слоя пропорционален $J_{\max} = H_{\max}(B) - H_{\min}(B)$. Следует, однако, подчеркнуть, что значения $H_{\max}$, $H_{\min}$ и $J_{\max}$ могут быть достигнуты, лишь если поверхности образца являются идеально гладкими и однородными и обеспечена стабилизация вихревых нитей в местах выхода их концов на поверхность.

Автор выражает глубокую благодарность Ф. Ф. Терновскому за ценные советы и постоянное внимание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмиди В. В. ЖЭТФ, **61**, 7, 1971.
2. Терновский Ф. Ф., Шехата Л. Н. ЖЭТФ, **62**, 2297, 1972.
3. Русинов А. И., Мкртчян Г. С. ЖЭТФ, **61**, 773, 1971.
4. Шмидт В. В. ЖЭТФ, **57**, 2096, 1969.
5. Абрикосов А. А. ЖЭТФ, **46**, 1464, 1964.
6. Жени П. Де. Сверхпроводимость металлов и сплавов. М., 1968.
7. Bean C. P., Livingston J. D. Phys. Rev. Lett., **12**, 14, 1964.

Поступила в редакцию
29.5 1972 г.

Кафедра
квантовой теории