Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1974

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 539.11.38

В. П. КОЛПАКОВ, Г. Н. ШИКИН

АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА И НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БЕЗМАССОВОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Лагранжиан системы полей выбираем в виде

$$L = \frac{R}{2\varkappa} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}} g^{\mu\nu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\nu}}\right) + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}} g^{\mu\nu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\nu}}\right) F(\varphi), \tag{1}$$

где R — скалярная кривизна, γ — параметр нелинейности, $F(\varphi)$ — произвольная функция от полевой функции скалярного поля φ. Лагранжианы такого вида играют важную роль в скалярно-тензорной теории гравитации [1]. Лагранжиану (1) соответствуют система уравнений Эйнштейна

$$R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu} R = -\varkappa T^{\mu}_{\nu} \tag{2}$$

и нелинейное уравнение скалярного поля

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\nu}}\right)(1 + \gamma F(\varphi)) + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}} g^{\mu\nu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\nu}}\right) F'(\varphi) = 0. \tag{3}$$

Исследуются статические аксиально-симметричные решения этой системы уравнений. Метрику выбираем в изотермической форме [2]:

$$ds^2 = e^{2(\nu-\lambda)}(d\rho^2 + dz^2) + g_{33} d\theta^2 - e^{2\lambda} dt^2, \tag{4}$$

где $\lambda(\rho, z)$, $\nu(\rho, z)$, $g_{33}(\rho, z)$ — неизвестные функции.

Выпишем компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля:

$$T^{\rho}_{\mu} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}} g^{\rho\nu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\nu}}\right)(1 + \gamma F) - \frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\mu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\nu}} g^{\nu\sigma} \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\sigma}}\right)(1 + \gamma F),$$

$$T^1_1 = -T^2_2 = \frac{1}{2} e^{-2(\nu-\lambda)}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}(1 + \gamma F), \tag{5}$$

$$T^3_3 = T^4_4 = -\frac{1}{2} e^{-2(\nu-\lambda)}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}(1 + \gamma F). \tag{6}$$

Из уравнения (2) с учетом того, что $T^1_1 + T^2_2 = 0$, имеем

$$R = \varkappa (T^3_3 + T^4_4). \tag{7}$$

Из суммы уравнений

$$R^3_3 - \frac{1}{2} R = -\varkappa T^3_3, \quad R^4_4 - \frac{1}{2} R = -\varkappa T^4_4$$

с учетом (8) получаем $R_3^3+R_4^4=0$, т. е. такое же соотношение, как и для вакуума; следовательно, g_{33} можно выбрать в виде [2]:

$$g_{33}=r^2e^{-2\lambda}. \tag{8}$$

Выпишем систему уравнений Эйнштейна и уравнение скалярного поля:

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\nu}{\partial\rho}=-\frac{\varkappa}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}(1+\gamma F), \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2\nu}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\nu}{\partial z^2}+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2=-\frac{\varkappa}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}(1+\gamma F), \tag{10}$$

$$2\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\right)-\frac{\partial^2\nu}{\partial\rho^2}-\frac{\partial^2\nu}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2=$$

$$=\frac{\varkappa}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}(1+\gamma F), \tag{11}$$

$$2\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\nu}{\partial z}=-\varkappa\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)(1+\gamma F), \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\frac{\gamma}{2}\,\frac{\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}F'(\varphi)}{(1+\gamma F(\varphi))}=0. \tag{13}$$

Для определения трех функций λ, ν, φ имеем систему пяти уравнений (9)—(13). Нелинейное уравнение скалярного поля (13) имеет такой же вид, как и в плоском случае. Его решение будем искать в зависимости от аргумента $r=\sqrt{\rho^2+z^2}$. Тогда оно принимает вид

$$\varphi''+\frac{2}{r}\varphi'+\frac{\gamma}{2}\,\frac{(\varphi')^2F'(\varphi)}{(1+\gamma F(\varphi))}=0. \tag{14}$$

Уравнение (14) имеет решение

$$\int\sqrt{1+\gamma F(\varphi)}\,d\varphi=-\frac{c_1}{r}, \tag{15}$$

где c_1 — произвольная постоянная; вторая произвольная постоянная равна нулю из условия на бесконечности $\varphi(r)\to\infty$ при $r\to\infty$. Конкретный вид решения зависит от вида $F(\varphi)$. Сложением уравнений (11) и (10) получаем уравнение для λ:

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}=0. \tag{16}$$

Решение уравнения (16) в зависимости от r имеет вид

$$\lambda(r)=-\frac{c_2}{r}, \tag{17}$$

где c_2 — произвольная постоянная, вторая произвольная постоянная равна нулю из условия на бесконечности $\lambda(r)\to 0$ или $r\to\infty$. Для определения $\nu(\rho, z)$ имеем систему уравнений (9) и (12) и дополнительное уравнение (10), являющееся следствием первых двух. Решение этой системы уравнений дает для $\nu(\rho, z)$ следующее выражение [3]:

$$\nu(\rho, z)=-\frac{1}{2}\left(c_2^2+\frac{1}{2}\varkappa c_1^2\right)\frac{\rho^2}{(\rho^2+z^2)^2}. \tag{18}$$

Отсюда можно определить все компоненты $g_{\mu\nu}$.

На основании полученных решений можно сделать следующие выводы. Нелинейное уравнение скалярного поля (13) имеет такой же вид, как и в плоском случае, т. е. порождаемое скалярным полем гравитационное поле не влияет на решения уравнения скалярного поля; в решение уравнения скалярного поля не входит гравитационная постоянная $\varkappa$. Компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ не зависят от нелинейного члена в уравнении скалярного поля, так как (18) не содержит параметр нелинейности скалярного поля γ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brans C., Dicke R. Phys. Rev., **124**, 925, 1961.
2. Дж. Л. Синг. Общая теория относительности. М., 1963.
3. Goutreau R. Nouvo cimento, **62 B**, 2, 1969.

Поступила в редакцию
2.2 1972 г.

Кафедра
теоретической физики

УДК 530.12 : 531.51

Р. Ф. ПОЛИЩУК

ИНВАРИАНТНОЕ ОСНАЩЕНИЕ ИЗОТРОПНЫХ НЕГОЛОНОМНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Мы рассмотрим инвариантное оснащение неголономных изотропных многообразий, существующих в римановом многообразии событий V_4 с лоренцовой сигнатурой. Вообще неголономным многообразием M_n^m в касательном многообразии $T(M_n)$ точечного дифференцируемого многообразия $\boldsymbol{M_n}$ называется поле m-направлений $\{E_m\} \subset T(M_n)$. Многообразия M_n^m и $M_n^{n'}$ оснащают друг друга в $T(M_n)$, если не имеют общих ненулевых направлений и имеют дополнительные размерности:

$$M_n^m \cap M_n^{m'} = \overset{\circ}{M_n}, \quad m + m' = n.$$

Касательное многообразие разлагается в прямую сумму оснащающих друг друга многообразий. Каждое неголономное многообразие может быть получено проектированием касательного многообразия по многообразию оснащения. Площадки E_m представляют собой центроаффинные пространства. Пространства E_m образуют слои, а M_n — базу неголономного многообразия M_n^m.

В многообразии событий V_4 существуют следующие изотропные неголономные многообразия: $X_4^{1,1}$, $X_4^{2,1}$, $X_4^{3,1}$. Правая единичка означает понижение ранга индуцированной метрики на единицу против ранга метрики самого неголономного многообразия. Поскольку многообразие $X_4^{1,1}$ является касательным к изотропной конгруэнции кривых, собственно неголономными многообразиями являются два прочих.

Многообразие $X_4^{3,1}$ образовано изотропными площадками, касающимися нулевого конуса по образующей с некоторым направляющим вектором $l^\alpha(x)$. Таким образом, оно полностью определяется заданием поля изотропного вектора l^α. Поэтому разумно строить оснащение с помощью инвариантных направлений, характеризующих поле направлений этого вектора.

Для конгруэнций различного типа характерные направления определены по-разному, поэтому будем отдельно строить оснащения для негеодезической, геодезической и нормальной (и геодезической) конгруэнций.

Первый вектор кривизны конгруэнции $X_1(l)$ (обозначение очевидно) не подходит для цели инвариантного оснащения, поскольку параметр вдоль конгруэнции не задан, а канонический параметр в общем случае отсутствует. Однако соприкасающаяся плоскость не зависит от выбора параметра. Выберем произвольный параметр вдоль конгруэнции. Тогда определено поле касательного вектора $l^\alpha = dx^\alpha/dt$ и разложение его ковариантной производной $\nabla_\mu l_\nu = l_\mu f_\nu + d_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}$,

$$f_\nu = l^\rho \nabla_\rho l_\nu, \quad d_{[\mu\nu]} = \omega_{(\mu\nu)} = 0, \quad [\ ] = alt, \quad (\ ) = sym.$$

Направление бивектора $l^{[\alpha} f^{\beta]} = l^{\alpha\beta}$ определено (с точностью до ориентации) инвариантно. В этом направлении лежит приращение касательного вектора при смещении точки вдоль кривой. Ограничим теперь произвольные смещения точки требованием, чтобы приращение касательного вектора принадлежало спрямляющей плоскости, ортогональной соприкасающейся:

$$dx^\rho\, l^{\alpha\beta} \nabla_\rho\, l_\beta = 0, \quad l^{\alpha\beta} \neq 0.$$