ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1974

УДК 533.9

В. Г. ТРОФИМОВ

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ АКУСТИЧЕСКОГО ВЕТРА В ПЛАЗМЕ

На основе уравнений Власова рассматривается возможность получения в системе электроакустического ветра. Во втором приближении по амплитуде возмущающего потенциала получен стационарный поток частиц, не затухающий в противоположность вызвавшему его начальному возмущению потенциала.

В настоящей работе на основе кинетических уравнений [1, 2] развивается последовательная теория электроакустических колебаний в полностью ионизированной плазме так, чтобы она включала в себя, если это будет возможно, нелинейный эффект постоянной составляющей для тока частиц в направлении бега волн. Природа акустического ветра в жидкостях исследовалась Рэлеем, Экертом [4, 5] и рядом других авторов. В этих работах предполагается, что акустический ветер связан с обязательным наличием вязкости жидкости. Совершенно иная природа переноса массы оказалась в теории волн на поверхности тяжелой жидкости [6]. Там установлено, что так называемые симметричные волны конечной амплитуды связаны не только с гармоническим процессом колебания частиц на поверхности, но и с весьма сложной трансляцией частиц в поверхностном слое вдоль направления бега волн. В связи с этим возникает вопрос, не является ли сам факт конечности амплитуды волн единственной причиной, порождающей стационарный поток как для случая объемных, так и для случая поверхностных волн, причем причиной, не зависящей от модели жидкости. В этом направлении А. А. Власовым [7] было показано, что принципиальная схема Некрасова [6] о природе стационарного тока остается в силе не только для волн, вызванных силой тяжести, но и для капиллярных волн, а также для плазменных волн на поверхности металла в вакууме. Далее подобные вопросы разбирались в [8] и [9]; в последней работе развита теория волнового ветра на основе кинетических уравнений при центральных, включая кулоновские, силах взаимодействия между частицами. Во всех этих работах происхождение стационарного потока акустического ветра объясняется на основе общих положений, связанных со специфической нелинейностью исходных уравнений и с тем, что, акустический ветер появляется во втором приближении по амплитуде к решению нелинейных уравнений, а также с тем, что физическое происхождение стационарного потока связано с выделением стационарной анизотропии в функции распределения по скоростям.

Указанная программа, однако, не является вполне доказанной. Так, в [8] показано, что во втором приближении вместе со стационарным потоком возникает изменение средней плотности среды, тогда как в [9] плотность среды во втором приближении оставалась постоянной. Заметим, что в последней работе предполагается затухание волн, которое, таким образом, вводится в теорию извне, а в конечном результате устремляется к нулю. В работе же [8] с самого начала предполагается отсутствие затухания, так как решение ищется с помощью преобразования Фурье как для пространственной, так и для временной координаты.

В настоящей работе решаются следующие вопросы. Можно ли теоретически только на основе кинетических уравнений плазмы получить волновой ветер, если не вносить извне гипотезы относительно затухания. Будет ли при этом изменяться средняя плотность среды. Необходимо ли считать трение в среде бесконечно малым для получения стационарного потока частиц, или стационарный поток может получиться и при конечном, но малом трении в среде, причем не вводящимся извне, а следующим из теории автоматически.

Исходные уравнения, первое приближение, наличие затухания волн

Рассмотрим полностью ионизированную плазму, состоящую из электронов с массой m и зарядом e и положительных ионов, которые образуют равномерный фон системы. В начальный момент времени распределение электронов с концентрацией n задается в виде

$$f_0(v) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}\, v_T} e^{\frac{-v^2}{2v_T^2}}.$$

Тогда возмущение $f(x,v,t)$ функции распределения электронов, вызванное малым исходным возмущением $\Phi_{\text{н}}$ потенциала Φ, будет удовлетворять системе уравнений [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, v, t) + v \frac{\partial}{\partial x} f - \frac{e}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{e}{m} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Phi - \Phi_{\text{н}}) = -4\pi e \int f(x, v, t)\, dv, \tag{1}$$

$$t \geqslant 0,\ |x| < \infty,\ f(x, v, 0) = 0.$$

Применяя к этой системе последовательно преобразование Фурье по пространственной переменной и преобразование Лапласа по временной

$$f(k, v, t) = \int\limits_{(\infty)} f(x, v, t)\, e^{-ikx}\, dx,$$

$$f(k, v, p) = \int\limits_0^\infty f(k, v, t)\, e^{-pt}\, dt$$

и различая изображения и оригиналы по входящим в них аргументам, получаем для изображений $f(k, v, p)$ и $\Phi(k, p)$:

$$f(k, v, p) = \frac{e}{m}\,\Phi(k, p)\,\frac{ikf_0'}{p+ivk} +$$

$$+ \frac{e}{m}\,\frac{1}{p+ivk}\int\frac{dq}{2\pi}\int\frac{dp'}{2\pi i}\,i(k-q)\,\Phi(k-q,\ p-p')\,\frac{\partial}{\partial v} f(q, v, p'), \qquad (2)$$

$$\Phi(k, p) = \frac{\Phi_{\text{н}}(k, p)}{k^2} + \frac{4\pi e}{k^2}\int dv f(k, v, p). \qquad (3)$$

Решение этой нелинейной системы будем искать методом последовательных приближений

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f^i, \quad \Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi^i.$$

В связи с тем что в дальнейшем будут рассматриваться лишь два первых приближения, выпишем их выражения для изображений $f(k, v, p)$ и $\Phi(k, p)$. Первое приближение запишется в виде

$$f^1(k, v, p) = \frac{e}{m}\,\frac{ikf_0'}{p+ivk}\,\frac{\Phi_{\text{н}}(k, p)}{k^2\varepsilon(k, p)},$$

$$\Phi^1(k, p) = \frac{\Phi_{\text{н}}(k, p)}{k^2\varepsilon(k, p)},$$

где диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(k, p)$ определяется как

$$\varepsilon(k, p) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m}\,\frac{1}{k^2}\int\frac{dv\,ikf_0'}{p+ivk}.$$

Подставляя $f^1(k, v, p)$ и $\Phi^1(k, p)$ в (2, 3), получим изображения f^2 и Φ^2 во втором приближении:

$$f^2(k, v, p) = \frac{e}{m}\,\frac{1}{p+ivk}\int\frac{dq}{2\pi}\int\frac{dp'}{2\pi i}\,i(k-q)\,\Phi^1(k-q,\ p-p')\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial v} f^1(q, v, p') + \frac{e}{m}\,\frac{ikf_0'}{p+ivk}\,\frac{4\pi e^2}{mk^2\varepsilon(k, p)}\int\frac{dv}{p+ivk}\times$$

$$\times\int\frac{dq}{2\pi}\int\frac{dp'}{2\pi i}\,i(k-q)\,\Phi^1(k-q,\ p-p')\,\frac{\partial}{\partial v} f^1(q, v, p'), \qquad (4)$$

$$\Phi^2(k, p) = \frac{4\pi e^2}{mk^2\varepsilon(k, p)}\int\frac{dv}{p+ivk}\int\frac{dq}{2\pi}\int\frac{dp'}{2\pi i}\,i(k-$$

$$-q)\,\Phi^1(k-q,\ p-p')\,\frac{\partial}{\partial v} f^1(q, v, p').$$

Переходя к обратным преобразованиям, под $\Phi_{\text{н}}(x, t)$ аналогично [3] будем подразумевать сумму двух импульсов в моменты времени $t=0$ и $t=\tau$:

$$\Phi_{\text{н}}(x, t) = \Phi_1\cos k_1 x\ \ \delta(\omega_p t) + \Phi_2\sin k_2 x\ \ \delta(\omega_p(t-\tau)), \qquad (5)$$

где амплитуды Φ_1 и Φ_2 являются малыми параметрами задачи, обеспечивающими применимость метода последовательных приближений, а ω_p — циклическая частота плазмы [1]. Нули $\varepsilon(k, p)$ лежат в левой полуплоскости p и при условии малых k имеют вид $p^{\pm}=\pm i\omega-\gamma$, где, например, $k_1=k_2$,

Записывая обратное преобразование Лапласа для $\Phi^1(x, p)$ и замыкая контур по p в левой полуплоскости, получаем для достаточно больших t полное выражение потенциала в первом приближении:

$$\Phi^1(x, t) = -\Phi_1 \frac{\omega_1^3}{\omega_p^3} e^{-\nu_1 t} \cos k_1 x \sin \omega_1 t -$$

$$-\Phi_2 \frac{\omega_2^3}{\omega_p^3} e^{-\nu_2(t-\tau)} \sin k_2 x \sin \omega_2 (t-\tau).$$

Из этой формулы видно, что при специальном выборе параметров процесса можно получить бегущую волну. Для этого достаточно положить, например, $k_1=k_2$, $\Phi_2=\Phi_1 e^{-\nu_2\tau}$ и $\tau=3\pi/2\omega_1$.

Таким образом, появляется возможность связать результаты рассматриваемой задачи с расчетами по взаимодействию плазмы с продольными бегущими волнами, выполненными другими авторами [9]. Использованная в этой работе постановка является более общей, так как бегущая волна в ее чистом виде является здесь лишь частным случаем, что позволяет глубже выяснить природу взаимодействия плазмы с произвольными продольными колебаниями, а не только с продольными бегущими волнами.

Далее по двойным знакам $\pm$, $\pm^*$, $\pm^{**}$, стоящим в формулах, будет подразумеваться суммирование. Это означает, что выражение, содержащее, например, только один из этих операторов, эквивалентно сумме двух членов аналогичного написания, в первом из которых берутся лишь верхние знаки, а во втором — лишь нижние. Если встречаются знаки сразу двух или трех типов, то, не обращая внимания на $\pm^*$ и $\pm^{**}$, производится операция $\pm$, далее, не обращая внимания на $\pm^{**}$, выполняется суммирование по $\pm^*$, после чего остается лишь $\pm^{**}$. Вводя определение фона

$$\rho^i(x, t) = \int_{(\infty)} dv f^i(x, v, t)$$

и потока

$$j^i(x, t) = \int_{(\infty)} dv v f^i(x, v, t)$$

для i-того приближения, рассчитаем ρ^1 и j^1. Для этого, подставляя в ρ^1 выражение $f^1(x,v,t)$ в виде обратного преобразования Лапласа, получим

$$\rho^1(x, t) = -\frac{ne\Phi_1}{m} \frac{\omega_1 k_1^2}{\omega_p^3} e^{-\nu_1 t} \cos k_1 x \sin \omega_1 t \cdot \left(1 + 3\left(\frac{k_1 v_\text{т}}{\omega_1}\right)^2\right) -$$

$$-\frac{ne\Phi_2}{m} \frac{\omega_2 k_2^2}{\omega_p^3} e^{-\nu_2(t-\tau)} \sin k_2 x \sin \omega_2 (t-\tau) \cdot \left(1+3\left(\frac{k_2 v_\text{т}}{\omega_2}\right)^2\right).$$

Аналогичный расчет для потока j^1 дает

$$j^1(x, t) = \frac{ne\Phi_1}{m} \frac{\omega_1^2 k_1}{\omega_p^3} e^{-\nu_1 t} \cos \omega_1 t \sin k_1 x \cdot \left(1 + 3\left(\frac{k_1 v_\text{т}}{\omega_1}\right)^2\right) -$$

$$-\frac{ne\Phi_2}{m}\frac{\omega_2^2k_2}{\omega_p^3}e^{-\gamma_2(t-\tau)}\cos\omega_2(t-\tau)\cos k_2x\cdot\left(1+3\left(\frac{k_2v_{\text{т}}}{\omega_2}\right)^2\right).$$

Это выражение, как и ρ^1, фактически определяется только тепловыми электронами, причем так же, как потенциал, экспоненциально затухает с течением времени. Зная фон и поток, нетрудно убедиться в выполнении закона сохранения в первом приближении [2]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^1(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}j^1(x,t)=0,$$

что необходимо, так как во втором приближении придется сопоставлять с опытом величины, связанные с переносом массы.

Второе приближение. Существование акустического ветра при $\gamma\neq 0$

Условие (5) позволяет представить $f^2(x,v,p)$ в виде суммы компонентов

$$f^2(x,v,p)=\sum_k f_k^2(x,v,p),$$

однако в связи с тем, что мы выясняем структуру акустического ветра в плазме, в вычислении всех компонентов $f^2(x,v,t)$ нет необходимости. Нетрудно убедиться, что любой компонент $f^2{}_k$ с неравным нулю k будет давать и в фоне, и в потоке множитель $\sin kx$ или $\cos kx$ и поэтому не может привести к акустическому ветру.

Таким образом, остаются лишь «акустические» компоненты $f^2(x,v,t)$, например, $f^2_{k_2-k_1}$ при $k_2=k_1$. Дальнейший расчет показывает, что именно компоненты $f^2_{k_2-k_1=0}$ являются существенными для решения поставленных во введении вопросов.

Поэтому рассмотрим $f^2_{k_2-k_1=0}$ подробнее. Для этого рассчитаем $f^2_{k_2-k_1}$ при $k_2\neq k_1$, а затем, устремив $k_2\to k_1$, получим $f^2_{k_2-k_1=0}$. Найдем вклад в $f^2_{k_2-k_1}$ от первого члена (4). Подставляя в его исходное выражение значения Φ^1 и f^1 и вычисляя $\int dp'$ и $\int dp$ с помощью теоремы Коши, получаем

$$\mp Ce^{\pm ix(k_2-k_1)\mp iv(k_2-k_1)(t-\tau)}\frac{\partial}{\partial v}\frac{f_0'e^{\pm ivk_1\tau}}{\varepsilon(\mp k_1,\pm ivk_1)\,\varepsilon(\pm k_2,\mp ivk_2)}\mp$$

$$\mp Ce^{\pm ix(k_2-k_1)}\frac{e^{p_1^{\pm *}\tau}e^{(p_2^{\pm **}+p_1^{\pm *})(t-\tau)}}{\varepsilon'(\mp k_1,p_1^{\pm *})\,\varepsilon'(\pm k_2,p_2^{\pm **})\,(p_2^{\pm **}+p_1^{\pm *}\pm iv(k_2-k_1))}\frac{\partial}{\partial v}\times$$

$$\times\left(\frac{f_0'}{p_1^{\pm *}\mp ivk_1}+\frac{f_0'}{p_2^{\pm **}\pm ivk_2}\right)\mp Ce^{\pm ix(k_2-k_1)}\frac{e_2^{p^{\pm *}(t-\tau)}}{\varepsilon'(\pm k_2,p_2^{\pm *})}\times$$

$$\times\left\{\frac{e^{\pm ivk_1t}f_0''}{(p_2^{\pm *}\pm ivk_2)\,\varepsilon(\mp k_1,\pm ivk_1)}+\frac{f_0'e^{\pm ivk_1(t-\tau)}}{(p_2^{\pm *}\pm ivk_2)}\frac{\partial}{\partial v}\frac{e^{\pm ivk_1\tau}}{\varepsilon(\mp k_1,\pm ivk_1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\pm ik_1)\,f_0'e^{\pm ivk_1\tau}}{\varepsilon(\mp k_1,\pm ivk_1)}\left(\frac{(t-\tau)\,e^{\pm ivk_1(t-\tau)}}{p_2^{\pm *}\pm ivk_2}-\frac{e^{\pm ivk_1(t-\tau)}}{(p_2^{\pm *}\pm ivk_2)^2}\right)\right\}\mp$$

$$\mp Ce^{\pm ix(k_2-k_1)} \frac{e^{p_1^{\pm *}\tau}}{\varepsilon'(\mp k_1, p_1^{\pm *})} \left\{ \frac{f_0'' e^{(p_1^{\pm *} \mp ivk_2)(t-\tau)}}{(p_1^{\pm *} \mp ivk_1)\,\varepsilon(\pm k_2, \mp ivk_2)} + \right.$$

$$+ \frac{(\mp ik_2) f_0' e^{(p_1^{\pm *} \mp ivk_2)(t-\tau)}\,(t-\tau)}{\varepsilon(\pm k_2, \mp ivk_2)(p_1^{\pm *} \mp ivk_1)} - \frac{(\mp ik_2) f_0' e^{(p_1^{\pm *} \mp ivk_2)(t-\tau)}}{\varepsilon(\pm k_2, \mp ivk_2)(p_1^{\pm *} \mp ivk_1)^2} -$$

$$\left. - \frac{f_0' \varepsilon'(\pm k_2, \mp ivk_2)\, e^{(p_1^{\pm *} \mp ivk_2)(t-\tau)}\,(\mp ik_2)}{\varepsilon(\pm k_2, \mp ivk_2)(p_1^{\pm *} \mp ivk_1)} \right\} \mp$$

$$\mp Ce^{\pm ix(k_2-k_1) \mp iv(k_2-k_1)(t-\tau)} \frac{e^{p_1^{\pm *}\tau}}{\varepsilon(\pm k_2, \mp iv(k_2-k_1) - p_1^{\pm *})\,\varepsilon(\mp k_1, p_1^{\pm *})} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{f_0'}{p_1^{\pm *} \mp ivk_1} + \frac{f_0''}{(-p_1^{\pm *} \pm ivk_1)} + \frac{(\mp ik_2) f_0'}{(-p_1^{\pm *} \pm ivk_1)} \right), \qquad (6)$$

где

$$C = ik_1k_2 \frac{e^2}{m^2} \frac{\Phi_1\Phi_2}{4\omega_p^2}.$$

Учитывая, что для этого выражения выполняются все условия предельного перехода $k_2 \to k_1$ под знаком интеграла по v как для $\int dv$, так и для $\int dv \cdot v$, получим, переходя к пределу $k_2 \to k_1$, что фон от $f^2_{k_2-k_1=0}$ равняется нулю. Это совпадает с результатами [9], где также не получено изменения средней плотности частиц.

Проводя подобный расчет для потока

$$j^2_{k_2-k_1=0} = \int dv v f^2_{k_2-k_1=0}$$

от $f^2_{k_2-k_1=0}$, имеем

$$j^2_{k_2-k_1=0} = n \frac{e^2}{m^2} \frac{\Phi_1\Phi_2}{2} \frac{k_1^3\omega_1^3}{\omega_p^6} \sin \omega_1\tau e^{-\gamma_1\tau} (1 + \Delta e^{-2\gamma_1(t-\tau)}). \qquad (7)$$

Здесь $\Delta = \frac{3}{2} \frac{k_1^2 v_т^2}{\omega_p^2}$, , причем отклик на не зависящее от n возмущение выводится из (7) заменой Φ на $\sqrt{n}\Phi$. Являясь формально асимптотическим по τ, первый член (7) при используемом в расчете условии

$$\frac{k_1 v_т}{\omega_p} \ll 1$$

в действительности верен для любых сколь угодно малых τ.

Наличие неравного нулю потока $j^2_{k_2-k_1=0}$ позволяет сделать ряд выводов относительно причин и общих условий появления акустического ветра в плазме.

Электроакустический ветер получен только на основе кинетических уравнений (1), причем никаких предварительных гипотез относительно характера затухания в системе не делалось.

Стационарный поток получен при наличии конечного трения в системе. Наряду с этим потоком во втором приближении существует и обычный поток, затухающий с течением времени.

Акустический ветер появляется во втором приближении по амплитуде возмущающего потенциала, причем средняя плотность среды остается неизменной.

Происхождение стационарного потока связано непосредственно с выделением стационарной анизотропии (первый член (6) при $k_2=k_1$) в функции распределения по скорости, а не с наличием волнового процесса в системе. Значит даже при отсутствии чисто волнового процесса, когда $|\sin\omega_1\tau| \neq 1$, в системе будет наблюдаться «волновой» ветер, достаточным условием которого является $\sin\omega_1\tau \neq 0$. Следовательно, наличие «волнового» ветра будет правилом, а его отсутствие исключением при самых разнообразных возмущениях указанного типа.

С математической точки зрения появление акустического ветра вызывается, подобно ряду других своеобразных эффектов [3], специфической нелинейностью исходных уравнений, относительно которых предполагалось лишь существование у них пространственно-однородного решения для начального момента времени.

В заключение благодарю проф. А. А. Власова за предложенную тему и обсуждения в процессе выполнения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. А. Теория многих частиц. М., 1950.
2. Власов А. А. Статистические функции распределения. М., 1966.
3. O'Neil T. M., Gould R. W. Physics of Fluids., **11**, 1, 1968.
4. Reliel P. Proc. Roy. Soc., **A 226**, 1, 1954.
5. Eckart C. Phys. Rev., **73**, 68, 1946.
6. Некрасов А. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М., 1951.
7. Власов А. А. ЖЭТФ, **27**, 224, 1954.
8. Андреев А. Диссертация. МОПИ, 1955.
9. Головко В. ЖЭТФ, **47**, 1765, 1964.

Поступила в редакцию
10.3 1972 г.

Кафедра
теоретической физики