Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1974

УДК 539.186.2

В. С. ПОТАПОВ

АСИМПТОТИКА СЕЧЕНИЯ ПЕРЕЗАРЯДКИ БЫСТРОЙ ЧАСТИЦЫ В ОДНОЭЛЕКТРОННЫХ АТОМАХ

Приведены результаты расчета асимптотических выражений для полного сечения перезарядки быстрой частицы в одноэлектронных атомах. Найдена зависимость сечения от квантовых чисел, характеризующих конечное связанное состояние, а также получены формулы для полных сечений захвата.

Введение

В последнее время появились работы, например [1—8], посвященные теоретическому изучению процесса перезарядки быстрой частицы A_i в одноэлектронных атомах, т. е. процессу вида

$$A_i + (eA_f) \rightarrow (A_i e) + A_f \tag{1}$$

и, в частности, перезарядке протона в атоме водорода:

$$p + H \rightarrow H + p. \tag{1'}$$

При этом предполагается, что A_α являются бесструктурными частицами с массами m_α и зарядами Z_α, а полное взаимодействие задано суммой парных кулоновских потенциалов. Наиболее распространенными приближенными методами решения нерелятивистской трехчастичной задачи (1) в рассматриваемом случае являются: обычное борновское приближение [2, 3], борновское приближение в методе искаженных волн [4, 5], а также теория возмущений, построенная на основе уравнений Фаддеева [6—8] [1]. Общее требование, предъявляемое к указанным приближениям, состоит в том, что в пределе $\frac{v_0}{v} \rightarrow 0$ (здесь v — относительная скорость падающей частицы, $v_0 = \frac{e^2}{\hbar}$ — «орбитальная» скорость) соответствующие выражения для амплитуды и сечений должны совпадать с асимптотически точным решением. Такое решение для амплитуды T_{fi} трехчастичного нерелятивистского рассеяния с перестройкой в случае перехода из основного состояния в конечное ns-состояние

[1] В [6, 7] использовалось ошибочное выражение для парной кулоновской амплитуды вне энергетической поверхности, полученное в [9]. На эту ошибку было указано в [10].

было получено ранее в [11, 12] путем анализа асимптотик членов итерационного ряда уравнений Фаддеева. При этом было выяснено, что сравнимый вклад в асимптотику амплитуды дают члены первого и второго порядков итерационного ряда уравнений Фаддеева, считая порядок матричного элемента, между начальным $|i>$ и конечным $<f|$ асимптотическими состояниями по числу содержащихся в нем парных амплитуд T_α ($\alpha=i, f, e$), т. е. все члены вида:

$$T_{fi}^{(\Phi)} = \langle f|\widehat{V}_{fe}|i\rangle + \langle f|T_e + T_i G_0 T_f + T_e G_0 T_f + T_i G_0 T_e|i\rangle. \quad (2)$$

Здесь G_0 — резольвента оператора кинетической энергии трехчастичной системы, $\widehat{V}_{\alpha\beta}$ — оператор парного взаимодействия частиц с индексами α, β.

С асимптотикой членов (2) совпадает также асимптотика членов первых двух порядков борновского ряда трехчастичного уравнения Липпмана — Швингера:

$$T_{fi}^{B} = \langle f|\widehat{v}_f + \widehat{v}_f G_0 \widehat{v}_i|i\rangle, \quad (3)$$

где $\widehat{v}_\alpha$ — часть взаимодействия, исчезающая при бесконечном удалении частицы A_α. Отметим, однако, что асимптотика первого борновского приближения в методе искаженных волн не совпадает с асимптотикой обычного первого борновского приближения, т. е. первого члена в (3) [13]. Этот результат в рамках одной из модификаций метода искаженных волн для (1′) был непосредственно получен в [5]. Найденная там асимптотика сечения для $1s \to 1s$-перехода имеет вид $Q_{DWA}^{\mathrm{I}} = 0{,}81 Q_{BK}^{(H)}$, в то время как вклад области малых углов рассеяния в полное сечение, полученное в первом борновском приближении, равен $Q_{DS} = 0{,}66\, Q_{BK}^{(H)}$, где $Q_{BK}^{(H)} = \frac{2^{18}}{5}\left(\frac{v_0}{v}\right)^{12} \pi r_0^2$; r_0 — боровский радиус.

Отметим, что асимптотика Q_{DWA}^{I} существенно зависит от вида искажающих потенциалов $\widehat{w}_i$, $\widehat{w}_f$ и вследствие этого не является хорошо определенной. Эта неоднозначность исчезает лишь при учете членов второго порядка метода искаженных волн. Как показано в [13], часть ведущих асимптотик членов второго порядка сокращается с «лишними» асимптотиками членов первого порядка, в результате чего главная асимптотика амплитуды

$$T_{fi}^{\mathrm{II}DWA} = \langle \Phi_f|\widehat{v}_f - \widehat{w}_f + (\widehat{v}_f - \widehat{w}_f) G_0 (\widehat{v}_i - \widehat{w}_i)|\Phi_i\rangle \quad (4)$$

(здесь $|\Phi_i>$, $<\Phi_j|$ — искаженные начальное и конечное состояния) будет совпадать с асимптотиками (2), (3), т. е. с асимптотически точным решением. Таким образом, выясняется, что правильная асимптотика амплитуды перезарядки (1) получается только при учете наряду с членами первого также членов второго порядка в каждом из приближенных выражений (2)—(4). В настоящей работе найден явный вид асимптотически точных выражений для амплитуд и сечений реакции (1) для перехода из основного состояния (eA_f) в произвольное конечное состояние (eA_i), а также получены формулы для полных сечений захвата.

§ 1. Асимптотические выражения для перезарядки в основное состояние

Чтобы избежать математических усложнений, рассмотрим сначала наиболее простой случай захвата электрона в основное состояние.

Полученные при этом результаты, однако, качественно справедливы и в более общем случае захвата в произвольное конечное состояние, рассматриваемом в следующем параграфе. Как уже отмечалось, асимптотика амплитуды реакции (1) совпадает с асимптотикой выражения (3), которое представим в виде (все рассмотрение проводится в системе центра масс)

$$T_{fi} = T_{pe} + T_{pp},$$

где

$$T_{pe} = \langle f | \hat{V}_{ie} + \hat{V}_{ie} G_0 \hat{V}_{fe} | i \rangle, \tag{5}$$

$$T_{pp} = \langle f | \hat{V}_{if} + \hat{V}_{if} G_0 \hat{V}_{ie} + \hat{V}_{fe} G_0 \hat{V}_{if} | i \rangle. \tag{6}$$

Здесь $|i\rangle \equiv | n_i l_i \widetilde{m}_i; \vec{k}_i\rangle$; $\vec{k}_i$ — относительный импульс частицы A_i; $(n_i l_i \widetilde{m}_i)$ — совокупность квантовых чисел, описывающих связанное состояние (eA_f), $\langle f | \equiv \langle n_f l_f \widetilde{m}_f; \vec{k}_f |$, $\vec{k}_f$ — относительный импульс связанного состояния (eA_i), характеризуемого квантовыми числами $(n_f l_f \widetilde{m}_f)$. В импульсном представлении соответствующие потенциалы имеют вид

$$V_{if}(p) = \frac{v_0}{2\pi^2} \frac{Z_i Z_f}{p^2}, \qquad V_{ie}(p) = -\frac{v_0}{2\pi^2} \frac{Z_i}{p^2}, \qquad V_{fe}(p) = -\frac{v_0}{2\pi^2} \frac{Z_f}{p^2}.$$

Для случая переходов в основное состояние асимптотики матричных элементов (5), (6) при наличии трех различных масс и экранированных с радиусом $\frac{1}{\varkappa}$ парных кулоновских потенциалов были найдены ранее в [12]. Ввиду того, что полученные асимптотические формулы хорошо определены при $\varkappa \to 0$, они непосредственно применимы и в рассматриваемой задаче. Учитывая, что $m_e \ll m_i$, m_f для (6) имеем:

$$T_{pp} = \frac{N \widetilde{\psi}_i(0)\, \widetilde{\psi}_f(0)}{\nu_e^2 m_e^3 v^6 \Delta^2 \Delta_e^2} \left[\frac{Z_i + Z_f}{\Delta_e^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{Z_f \dfrac{m_f}{m_i}}{1 - \dfrac{m_f}{m_i} - \Delta_e^2 - 2i \dfrac{v_0}{v} \dfrac{m_f}{m_i} (Z_i + Z_f) - Z_i \dfrac{m_i}{m_f}} \right]. \tag{7}$$

Здесь

$$\Delta_e^2 = \nu_e^2 \left(\frac{1}{m_f} \vec{e}_i + \frac{1}{m_i} \vec{e}_f \right)^2, \qquad \Delta^2 = \left[\vec{e}_i - \vec{e}_f \left(1 + \frac{m_e}{2\nu_e} \right) \right]^2,$$

$$\vec{e}_i = \frac{1}{|\vec{k}_i|} \vec{k}_i, \qquad \vec{e}_f = \frac{1}{|\vec{k}_f|} \vec{k}_f, \qquad \nu_e = \frac{m_i m_f}{m_i + m_f}.$$

Нормировочная константа $N = (2\pi\hbar)^3 \left(\frac{v_0}{2\pi^2} \right)^2$, $\widetilde{\psi}_i(0)$ и $\widetilde{\psi}_f(0)$ — значения координатных волновых функций связанных состояний (A_f, e) и (A_i, e) в нуле.

В (7) для определенности полагаем, что $m_f < m_i$. Асимптотическое выражение для (5) имеет вид

$$T_{pe}=\frac{2N\widetilde{\psi}_i(0)\,\widetilde{\psi}_f(0)m_eZ_iZ_f}{v_e^6v^6\Delta^4}\left[\frac{1}{\Delta^2}+\frac{1}{\Delta^2-\frac{m_e^2}{v_e^2}-2i\frac{m_e^2}{v_e^2}\frac{v_0}{v}(Z_i+Z_f)}\right]. \quad (8$$

Первые слагаемые в квадратных скобках в (7) и (8) отвечают членам первого порядка в (5) и (6), а остальные — членам второго порядка. Качественные оценки (7) и (8) показывают, что каждый из слагаемых в (7): $T_{pp}\sim\frac{\mathrm{const}}{v^6m_e^3v_e^2}\cdot\frac{1}{\Delta^2\Delta_e^4}$, в то время как $T_{pe}\sim\frac{\mathrm{const}'m_e}{v^6v_e^6\Delta^6}$. Таким образом, T_{pp} значительно превосходит T_{pe} и становится сравнимым с ним лишь в области малых углов рассеяния: $\Delta^2\approx\frac{m_e^2}{v_e^2}$. Однако при малых углах из-за интерференции членов первого и второго порядков вклад суммы T_{pp} становится существенно меньшим, чем вклад каждого слагаемого в отдельности. А именно, в области $\Delta^2\approx\frac{m_e^2}{v_e^2}$ $T_{pp}\sim\frac{\widetilde{\mathrm{const}}}{v^6m_e^3\,m_im_f}$, тогда как $T_{pe}\sim\frac{\widetilde{\mathrm{const}'}}{v^6m_e^5}$, и, следовательно, T_{pe} приблизительно в $\frac{m_im_f}{m_e^2}$ раз превосходит T_{pp}.

Характерная особенность членов второго порядка в (6) состоит в том, что с ними связан максимум в дифференциальном сечении при значениях угла рассеяния θ $(\cos\theta=(\vec{e}_i\vec{e}_f))$, удовлетворяющих соотношению $\Delta_e^2=1-\frac{m_f}{m_i}$, т. е. $\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{m_f}{m_i}\right)^2$. Этот максимум дает член $\langle f|\hat{V}_{fe}G_0\hat{V}_{fi}|i\rangle$, а соответствующий процесс может быть интерпретирован как два последовательных парных столкновения частицы A_f сначала с налетающей частицей A_i, а затем с электроном, причем в результате двух рассеяний конечные скорости A_i и e оказываются близкими друг к другу. Вклад указанного максимума в полное сечение имеет вид

$$Q_{pp}=\frac{5\pi}{2^{12}}\frac{v}{v_0}\left(\frac{m_e}{m_f}\right)^2\frac{1}{\left(1-\frac{m_f}{m_i}\right)^2}\frac{Z_f^2}{(Z_i+Z_f)}Q_{BK}, \tag{9}$$

где

$$Q_{BK}=\frac{2^{18}}{5}(Z_iZ_f)^5\left(\frac{v_0}{v}\right)^{12}\pi r_0^2 \tag{10}$$

так называемое сечение Бринкмана—Крамерса, полученное при учете лишь одного взаимодействия V_{ie} в (3). Формула (9) непосредственно не применима к специальному случаю $m_i=m_f$, который был рассмотрен в [11]. В этом случае максимум, связанный с ядер-ядерным взаимодействием, находится при $\theta=\pi$, а соответствующий процесс рассеяния можно интерпретировать как лобовой удар частиц A_i и A_f. Главным в этой области углов является член первого порядка в (6), который дает вклад в сечение [1]

[1] В [11] в формуле (38) допущена опечатка. Первый член в квадратных скобках равен $\frac{5}{3\cdot2^{14}}\frac{1}{M^2}\left(\frac{v}{v_0}\right)^6$.

$$Q_{pp}=\frac{5}{3\cdot 2^{10}(Z_i+Z_f)^4}\left(\frac{v}{v_0}\right)^6\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2 Q_{BK}, \tag{11}$$

рассмотренный ранее в [14].

Как отмечалось выше, в области малых углов рассеяния главными являются члены (8), которые приводят к асимптотике сечения:

$$Q_{pe}^{(1s)}=\left(0{,}296+\frac{5\pi}{2^{11}}\frac{1}{(Z_i+Z_f)}\frac{v}{v_0}\right)Q_{BK}. \tag{12}$$

Сравнивая (9) и (11) с (12), находим, что в рассматриваемом случае $m_e \ll m_i,\ m_f$ вкладом Q_{pp} в полное сечение Q_{fi} реакции (1) можно пренебречь по сравнению с Q_{pe}. Таким образом, асимптотика сечения Q_{fi} $(1s)$ совпадает с (12). При получении асимптотик (7), (8) из исходных выражений (5), (6) соотношение масс $\frac{m_e}{\nu_e}$ считалось конечным; причем для справедливости асимптотик (7), (8) достаточно условия $\frac{v_0}{v}\ll 1$, вовсе не связанного с отношением $\frac{m_e}{\nu_e}$. Разложение по степеням m_e/ν_e проведено там, где это возможно, лишь в конечных формулах.

§ 2. Зависимость сечения перезарядки от квантовых чисел конечного связанного состояния

В предыдущем параграфе выяснено, что для нахождения ведущей асимптотики сечения перезарядки (1) достаточно ограничиться членами T_{pe} (5) в (3). Найдем теперь, какой вклад в асимптотику дают переходы в различные конечные связанные состояния подсистемы (eA_i). Наиболее просто этот вопрос решается для первого члена в (5):

$$T_{fi}^{BK}=\langle f|\widehat{V}_{ie}|i\rangle=-\Psi_i(\vec{\Delta}_f)\,\Psi_f(\vec{\Delta}_i)\left[\frac{\Delta_f^2}{2m_e}+\frac{m_e v_0^2}{2}\right]. \tag{13}$$

Здесь

$$\vec{\Delta}_i=\vec{k}_i-\frac{m_i}{m_i+m_e}\vec{k}_f,\qquad \vec{\Delta}_f=\vec{k}_f-\frac{m_f}{m_f+m_e}\vec{k}_i,$$

передаваемые импульсы,

$$\Psi_\alpha(\vec{p})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3\vec{r}\,e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r})}\,\widetilde{\Psi}_\alpha(\vec{r})=\psi_{n_\alpha l_\alpha}(p)\,Y_{l_\alpha \widetilde{m}_\alpha}\left(\frac{\vec{p}}{p}\right), \tag{14}$$

$$\widetilde{\Psi}_\alpha(\vec{r})=R_{n_\alpha l_\alpha}(r)\,Y_{l_\alpha\widetilde{m}_\alpha}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\qquad(\alpha=i,\ f),$$

$R_{nl}(r)$ — радиальная кулоновская функция дискретного спектра и $Y_{lm}(\varphi\theta)$ — сферическая функция [15]. Используя асимптотику [15]

$$\psi_{nl}(p)\to\left[\frac{2(n+l)!}{(n-l-1)!}\right]^{3/2}\frac{2}{\Gamma(l+3/2)}\,\frac{1}{n^{l+2}}\cdot\frac{1}{p^{l+4}} \tag{15}$$

при $p\to\infty$ (импульсы здесь выражены в ат. ед.) и учитывая, что в этом пределе $\Delta_i^2=\Delta_f^2=\Delta^2 k_i^2$, причем

$$\frac{1}{4}m_e^2 v^2\leqslant\Delta_i^2\leqslant 2k_i^2,$$

Находим, что главный вклад в (13) дают переходы в конечные s-состояния (eA_i). Амплитуды переходов в состояния с высшими моментами убывают, как $1/v^{6+l_f}$. Таким образом, асимптотика (13) имеет вид

$$T_{fi}^{BK}(n_f l_f \widetilde{m}_f) = \frac{\delta_{l_f 0}\,\delta_{\widetilde{m}_f 0}}{n_f^{3/2}}\, T_{fi}^{BK}(1,\, 0,\, 0), \tag{16}$$

а для сечений получается известный закон $\frac{1}{n_f^3}$ [16, 17].

Главная асимптотика матричного элемента второго порядка в (15) в общем случае вычислена в [12]. Для данной задачи имеем

$$\langle f|\hat{V}_{fe} G_0 \hat{V}_{ie}|i\rangle \approx \frac{N}{(2\pi\hbar)^3}\,\frac{2Z_i Z_f m_e}{\Delta_i^2 \Delta_f^2} \iint \frac{d^3 p\, d^3 p'\, \Psi_i(\vec{p})\, \Psi_f(\vec{p}\,')}{\Delta_i^2 - m_e^2 v^2 + 2(\vec{p}\,\vec{\Delta}_i) + 2(\vec{p}\,',\vec{\Delta}_f) - i\varepsilon}. \tag{17}$$

Переходя к безразмерной переменной $t = \frac{\Delta_i^2}{m_e^2 v^2}$, асимптотику (1) представим в виде

$$T_{fi}(n_f l_f \widetilde{m}_f) = \frac{12 Z_i Z_f N}{m_e^5 v^6} \cdot \frac{1}{t^2} \left\{ \frac{\Gamma_{n_f l_f}(0)}{\sqrt{4\pi t}} + \frac{iv}{2v_0} \left[\int_0^\infty ds\, \Gamma_{n_f l_f}(s) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\, e^{-i\frac{s}{2}\frac{v}{v_0}(t-1)} \right] Y_{l_f \widetilde{m}_f}\left(\frac{\vec{\Delta}_f}{\Delta_f} \right) \right\}, \tag{18}$$

где

$$\Gamma_{n_f l_f}(s) = \widetilde{\Psi}_i(s r_0)\, R_{n_f l_f}(s r_0). \tag{19}$$

Полное сечение реакции (1) $Q_{fi}(n_f l_f \widetilde{m}_f)$ связано с (18) соотношением

$$Q_{fi}(n_f l_t \widetilde{m}_f) = (2\pi)^4 \hbar^2 v_e^2 m_e^2\, \pi \int_{1/4}^{\infty} dt\, |\, p_{fi}(n_f,\ l_f \widetilde{m}_f;\ t)\,|^2. \tag{20}$$

Вычисление ведущей при $\frac{v_0}{v} \to 0$ асимптотики интеграла (20) дает

$$Q_{fi}(n_f l_f \widetilde{m}_f) = \left[0{,}296\,\delta_{l_f 0} + \frac{5\pi}{2^{10}}\,\frac{v}{v_0}\, I_{n_f l_f \widetilde{m}_f} \right] \frac{Q_{BK}}{n_f^3}, \tag{21}$$

где

$$I_{nlm} = 4\pi n^3 \left| Y_{lm}\left(\frac{\vec{\Delta}_f}{\Delta_f} \right) \right|^2 \frac{1}{\Gamma_{1s}^2(0)} \int_0^\infty ds\, |\,\Gamma_{nl}(s)\,|^2, \tag{22}$$

а Q_{BK} определено формулой (10). Поскольку от $\widetilde{m}_f$ в (21) зависят лишь сферические функции, суммирование по $\widetilde{m}_f$ может быть проведено в явном виде, что дает

$$Q_{fi}(n_f l_f) = \left[0{,}296\,\delta_{l_f 0} + \frac{5\pi}{2^{10}}\,\frac{v}{v_0}\, I_{n_f l_f} \right] \frac{Q_{BK}}{n_f^3}, \tag{23}$$

где

$$I_{nl}=\frac{(2l+1)\,n^3}{\widetilde{\Psi}_i^2(0)\,R_{1s}^2(0)}\int\limits_0^\infty ds\,\widetilde{\Psi}_i^2(sr_0)\,R_{nl}^2(sr_0). \tag{24}$$

Используя в (24) кулоновские волновые функции, получим

$$I_{nl}=\frac{(2l+1)}{2Z_f}\,\frac{(n-l-1)!}{(n+l)!}\int\limits_0^\infty dse^{-s(1+na)}\,s^{2l}\,[L_{n-l-1}^{(2l+1)}(s)]^2, \tag{25}$$

где

$$a=\frac{Z_i}{Z_f},\qquad L_n^{(m)}(s)=\frac{(n+m)!}{m!n!}F(-n,\ m+1;\ s),\quad \text{а}\quad F(\alpha,\ \beta;\ x)$$

— вырожденная гипергеометрическая функция [18]. Интеграл типа (25), имеющий вид преобразования Лапласа, в более общем случае вычислен в [19]. Для данных значений параметров имеем

$$I_{nl}=\frac{1}{2Z_f(na+1)^{2l+1}}\sum_{\nu=0}^{n-l-1}\frac{(2l+\nu)!}{(2l)!\,\nu!\left(1+\dfrac{1}{na}\right)^{\nu}}\times$$

$$\times F\left(-\nu,\ -\nu+1;\quad 2l+2;\quad \frac{1}{n^2a^2}\right), \tag{26}$$

где $F\left(-n,\ -n+1;\quad 2l+2;\ \dfrac{1}{n^2a^2}\right)$ — гипергеометрическая функция, сводящаяся в данном случае к многочлену конечной степени.

Суммируя далее (23) по всем конечным l_f от 0 по n_f—1, получим

$$Q_{fi}(n_f)=\left[0{,}296+\frac{5\pi}{2^{11}}\,\frac{v}{v_0}\,\frac{I_{n_f}(a)}{(Z_i+Z_f)}\right]\frac{Q_{BK}}{n_f^3}, \tag{27}$$

где

$$I_n(a)=2Z_f(1+a)\sum_{l=0}^{n-1}I_{nl}. \tag{28}$$

Выражение для $I_n(a)$ может быть вычислено в замкнутом виде для больших n. В этом пределе (26) переходит в

$$I_{nl\,n\gg1}\approx\frac{1}{2Z_f(na)^{1+2l}}\sum_{\nu=0}^{n-l-1}\frac{(2l+\nu)!}{(2l)!\,\nu!}=\frac{(l+n)!}{2Z_f(na)^{1+2l}\,(2l+1)!\,(n-l-1)!} \tag{29}$$

Используя пуассоновское приближение для биномиального распределения, получим

$$I_{nl\,n\gg1}\approx\frac{1}{2Z_f\,(2l+1)!}\left(e^{-\frac{1}{na}}\,\frac{1}{a}\right)^{2l+1}. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (28) и устремляя верхний предел в (28) к бесконечности, находим

$$I_n(a)\underset{n\to\infty}{\cong}(1+a)\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{a}, \tag{31}$$

и, таким образом, устанавливаем, что для переходов в состояния с большими n_f имеет место закон $\frac{1}{n_f^3}$. Для перехода в состояния с малыми n_f необходимо вычислить конечные суммы (26), (28). Результаты расчета для различных n и a приведены в таблице.

Значения суммы I_n (a) при различных a, n

n \ a	1/4	1/2	1	2	4
1	1	1	1	1	1
2	1,482	1,313	1,185	1,104	1,057
3	1,995	1,556	1,288	1,151	1,074
4	2,533	1,740	1,414	1,180	1,086

Окончательное выражение для сечения захвата получается путем суммирования по всем конечным n_f. Учитывая, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1{,}202$, находим

$$Q_{fi}(a) = 1{,}202 \left[0{,}296 + \frac{5\pi}{2^{11}} \frac{v}{v_0} \cdot \frac{I(a)}{(Z_i + Z_f)} \right] Q_{BK}, \tag{32}$$

$$I(a) = \frac{1}{1{,}202} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(a)}{n^3}.$$

Для случая перезарядки протона или его изотопов (дейтрона, тритона) в атоме водорода или атомах указанных изотопов, т. е. при $a = \frac{Z_i}{Z_f} = 1$ величина J (1) с точностью до десятых равна 1.

Таким образом, асимптотика сечения перезарядки каждого из указанных процессов будет иметь вид

$$Q_{fi}(1) \cong 1{,}2 \left[0{,}3 + \frac{5\pi}{2^{12}} \frac{v}{v_0} \right] Q_{BK}. \tag{33}$$

В результате проведенных расчетов получено асимптотическое выражение для сечения перезарядки вида (1). В математическом пределе $\frac{v_0}{v} \to 0$ сечение убывает как $\frac{1}{v^{11}}$, однако при умеренных больших v главным является константный член в (32). Оценки показывают, что для реакции (1) вклад второго члена в (32) становится важным, начиная с энергий падающего протона свыше 1 *Мэв* (в лабораторной системе), давая, например, при 1,5 *Мэв* около 10% вклада в сечение. Асимптотика сечения не зависит от соотношения масс частиц A_i, A_f, но зависит от их зарядов.

При не слишком больших v наиболее вероятными оказываются переходы в конечные s-состояния (eA_i), однако при $v \to \infty$ сечения переходов в состояния с высшими моментами убывают так же, $\frac{c_{nl}}{v^{11}}$, как и сечение перехода в s-состояния, хотя численный расчет показывает, что коэффициенты c_{nl} быстро убывают с ростом l.

Что касается зависимости сечения от главного квантового числа n_f, то для больших n_f оказывается справедливым известный закон $\frac{1}{n_f^3}$. Для малых n_f простая зависимость от n_f отсутствует, хотя ввиду слабой зависимости $I_n(a)$ от n можно считать, что закон $\frac{1}{n_f^3}$ приближенно выполняется и при малых n_f.

ЛИТЕРАТУРА

1. Holt A. R., Moiseiwitsch B. L. Adv. in Atom. and Molec. Phys., v. 4, N. Y.—London, 1968, p. 143.
2. Dettmann K., Leibfried G. Z. Phys., **218**, 1, 1969.
3. Mittleman M. H. Phys. Rev., **2A**, 2324, 1970.
4. Salin A. J. Phys. **B3**, 937, 1970.
5. Geltman S. J. Phys., **B4**, 1288, 1971.
6. Shastry C. S., Kumar L., Callaway J. Phys. Rev., **1A**, 1137, 1970.
7. Chen J. C. Y., Hambro L. J. Phys., **B4**, 191, 1971.
8. Carpenter C. P., Tuan T. F. Phys. Rev., **2A**, 1811, 1970.
9. Nutt G. L. J. Math. Phys., **9**, 796, 1968.
10. Nuttal J., Stagat R. W. Phys. Rev., **3A**, 1355, 1971.
11. Бродский А. М., Потапов В. С., Толмачев В. В. ЖЭТФ, **58**, 264, 1970.
12. Бродский А. М., Потапов В. С. «Ядерная физика», **12**, 1163, 1970.
13. Потапов В. С. «Ядерная физика», **16**, 18, 1972.
14. Mapleton R. A. Proc. Phys. Soc., **83**, 895, 1964.
15. Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М., 1960.
16. Oppenheimer J. R. Phys. Rev., **31**, 349, 1928.
17. Jackson J. D., Schiff H. Phys. Rev., **89**, 359, 1953.
18. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1. М., 1965.
19. Buchholz H. Die Konfluente hypergeometrische Funktion. Berlin—Gottingen—Heidelberg, Sec. 12, 1953.

Поступила в редакцию
30.3 1972 г.

Кафедра
аэродинамики
и газовой динамики