Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1974

УДК 539.12.01

В. Ч. ЖУКОВСКИЙ, Н. С. НИКИТИНА

ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНОВ В ПОСТОЯННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Исследованы условия квазиклассичности и получены квазиклассические решения уравнения Дирака для электрона, движущегося в постоянном электрическом и параллельном ему магнитном полях. Рассчитано излучение фотонов в параллельных полях с учетом поляризационных и спиновых эффектов. Показано, что полученная формула для вероятности может быть использована для описания излучения квазиклассическим электроном в произвольном постоянном и однородном электромагнитном поле.

Движение релятивистских электронов в постоянных внешних полях с напряженностью, меньшей критической $B_0 = \frac{m^2}{e_0} = 4{,}41 \cdot 10^{13}$ *гаусс*, носит квазиклассический характер. Условия квазиклассичности в случаях однородного магнитного и однородного электрического полей были рассмотрены ранее [1]. При этом было показано, что вероятности излучения в этих полях с учетом поляризационных и спиновых эффектов могут быть записаны в единой форме через инвариантные функции на основе ковариантного определения спиновых и поляризационных состояний электронов и фотонов во внешнем поле.

В настоящей заметке рассмотрен случай параллельных электрического и магнитного полей. Найдены квазиклассические решения уравнения Дирака, с помощью которых рассчитана вероятность излучения фотонов в параллельных полях.

Квазиклассическое решение уравнения Дирака

Систему координат и калибровку потенциала A^μ, задающего параллельные поля $\vec{\mathscr{E}} \| \vec{H} \| Oz$, выбираем следующим образом [1]

$$A^\mu = \{0, xH, -\mathscr{E}t, 0\}. \tag{1}$$

Решение уравнения Дирака для электрона, движущегося в постоянных однородных и параллельных магнитном и электрическом полях (1), будем искать в виде:

[1] Ниже принята система единиц $c = \hbar = 1$, метрика $(+---)$, $a^\mu = \{a^0, \vec{a}\}$, $a_\mu = \{a^0, -\vec{a}\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$.

$$\Psi(\vec{r}, t) = N \begin{pmatrix} if_1(\ \ A_1g_1 + Ag_2) \\ f_2(\ \ Bg_1 + B_1g_2) \\ if_1(-A_1g_1 + Ag_2) \\ f_2(\ \ Bg_1 - B_1g_2) \end{pmatrix} e^{ip_2y + ip_3z}, \tag{2}$$

где A, A_1, B, B_1 — спиновые коэффициенты, а функции f_i, g_i $(i = 1, 2)$ удовлетворяют уравнениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial^2\eta^2} + \frac{2p_\perp}{\sqrt{e_0H}}\eta - \eta^2 \mp 1\right) f_{1,2} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \frac{E_\perp^2}{e_0\mathcal{E}} + \tau^2 \pm i\right) g_{1,2} = 0 \quad (E_\perp^2 \equiv m^2 + p_\perp^2). \tag{3}$$

Здесь вместо x и t введены новые безразмерные переменные η и τ:

$$\eta = \xi\sqrt{e_0H}, \quad \xi = x + \frac{p_2 + p_\perp}{e_0H},$$

$$\tau = (t - t_0)\sqrt{e_0\mathcal{E}}, \quad t_0 = \frac{p_3}{e_0\mathcal{E}}.$$

Условия квазиклассичности движения частицы в рассматриваемом случае параллельных полей имеют вид

$$\frac{p_\perp}{\sqrt{e_0H}} \gg 1, \quad \frac{E_\perp^2}{e_0\mathcal{E}} \gg 1. \tag{4}$$

Принимая во внимание неравенства (4), для уравнений (3) получим следующие асимптотические решения [2]:

$$f_{1,2} \simeq \Phi(-\lambda\xi_{1,2}), \quad \lambda = (2e_0Hp_\perp)^{1/3}, \quad \xi_{1,2} = \xi \mp \frac{1}{2p_\perp};$$

$$g_{1,2} \simeq \exp\left\{-i(t - t_0)\left(E_\perp \pm i\frac{e_0\mathcal{E}}{2E_\perp}\right) - \frac{i}{6}\frac{(t - t_0)^3}{E_\perp}(e_0\mathcal{E})^2\right\}. \tag{5}$$

Здесь Φ — функция Эйри:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\psi e^{ix\psi + i\frac{\psi^3}{3}}. \tag{6}$$

Полученное решение описывает движение электрона на малом участке квазиклассической траектории $\xi^2 \ll R^2 = (p_\perp/e_0H)^2$ в интервале времени $(t-t_0)^2 \ll (E_\perp/e_0\mathcal{E})^2$.

Такое решение оказывается удобным для исследования излучения, поскольку, как будет видно из дальнейшего, формирование излучения релятивистского квазиклассического электрона происходит на весьма малом участке траектории в течение достаточно малого временного интервала.

Для определения спиновых коэффициентов потребуем, чтобы функция $\Psi(\vec{r}, t)$ была также собственной функцией оператора спиновой поляризации $\widehat{M}$, являющегося интегралом движения. Для ковариантного задания спинового состояния, так же как и в [1], воспользуемся оператором $\widehat{M} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}$ (см. также [3, 4, 5]):

$$\hat{M}\Psi = \zeta\mathcal{M}\Psi, \quad \zeta = \pm 1, \tag{7}$$

где

$$\hat{M} = \Pi_3 \cos\alpha + \Phi_3 \sin\alpha,$$

$$\Pi_3 = m\sigma_3 + \rho_2 [\vec{\sigma}\vec{P}]_3, \quad \vec{P} = -i\vec{\nabla} + e_0\vec{A},$$

$$\Phi_3 = -\rho_3 [\vec{\sigma}\vec{P}]_3, \tag{8}$$

$$\mathcal{M} = \sqrt{m^2 \cos^2\alpha + p_\perp^2}.$$

Как видно из (8), уравнение (7) определяет состояния электрона с ориентацией спина вдоль ($\zeta=1$) или против ($\zeta=-1$) направления, составляющего угол α с осью z. Этот угол задается относительной величиной напряженности магнитного и электрического поля: $\alpha = \arccos \frac{H}{\sqrt{H^2 + \mathcal{E}^2}}$.

Принимая во внимание условия (4) и решая уравнения (7) совместно с уравнениями Дирака, найдем спиновые коэффициенты:

$$A = -\frac{\zeta}{2}\sqrt{1 + \zeta\frac{m\cos\alpha}{\mathcal{M}}}\, e^{i\frac{\alpha-\zeta\beta}{2}},$$

$$A_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{1 + \zeta\frac{m\cos\alpha}{\mathcal{M}}}\, e^{-i\frac{\alpha-\zeta\beta}{2}},$$

$$B = -\frac{\zeta}{2}\sqrt{1 - \zeta\frac{m\cos\alpha}{\mathcal{M}}}\, e^{i\frac{\alpha+\zeta\beta}{2}}, \tag{9}$$

$$B_1 = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \zeta\frac{m\cos\alpha}{\mathcal{M}}}\, e^{-i\frac{\alpha+\zeta\beta}{2}},$$

$$|A|^2 + |A_1|^2 + |B|^2 + |B_1|^2 = 1, \; \beta = \arccos\frac{\mathcal{M}}{E_\perp}.$$

Значение нормировочного коэффициента

$$N = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{\lambda}{L_0}} \tag{10}$$

следует из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy \int_{-L/2}^{L/2} dz \Psi^+\Psi = 1,$$

причем мы ввели конечный «объем» L_0 фазы Ψ в интегральном представлении функций Эйри (6).

Вероятность излучения

Вероятность излучения линейно-поляризованного фотона электроном за время t дается выражением

$$\mathcal{P} = \left(\frac{e_0}{2\pi}\right)^2 \sum_{a'} \int \frac{d^3\varkappa}{\varkappa} (e_\mu \alpha^{*\mu}_{a'a})(e^*_\nu \alpha^\nu_{a'a}). \tag{11}$$

Здесь

$$\alpha^{\mu}_{a'a} = \int dt \int d^3x e^{i(\varkappa t - \vec{\varkappa}\vec{r})} \Psi^{+}_{a'} \alpha^{\mu} \Psi_a \quad (\alpha^{\mu} = \{I, \vec{\alpha}\}); \tag{12}$$

Ψ_a, $\Psi_{a'}$ — волновые функции начального и конечного состояний электрона во внешнем поле, а e^{μ} — один из двух единичных четырехмерно-поперечных векторов поляризации фотона, заданных в ковариантной форме, согласно [1]:

$$e^{\mu}(1) = \frac{F^{\mu\nu}\varkappa_{\nu}}{\sqrt{-(F^{\mu\nu}\varkappa_{\nu})^2}}, \quad e^{\mu}(2) = \frac{F^{*\mu\nu}\varkappa_{\nu}}{\sqrt{-(F^{\mu\nu}\varkappa_{\nu})^2}}, \tag{13}$$

где $F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$, а $\varkappa^{\nu}$ — 4 — вектор импульса фотона.

В результате градиентного преобразования соответствующие трехмерно-поперечные векторы будут представлять собой линейные комбинации известных векторов σ- и π-компонентов поляризации [3]:

$$\begin{aligned} \vec{e}(1) &= \vec{e}(\sigma)\cos\alpha - \vec{e}(\pi)\sin\alpha, \\ \vec{e}(2) &= \vec{e}(\sigma)\sin\alpha + \vec{e}(\pi)\cos\alpha, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}(\sigma) &= (\sin\varphi, \ -\cos\varphi, 0), \\ \vec{e}(\pi) &= (\cos\theta\cos\varphi, \ \cos\theta\sin\varphi, \ -\sin\theta), \end{aligned} \tag{15}$$

где θ и φ — сферические углы вектора импульса фотона

$$\frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa} = (\sin\theta\cos\varphi, \ \sin\theta\sin\varphi, \ \cos\theta). \tag{16}$$

Интегрирование по y и z в матричных элементах (12) дает законы сохранения

$$p'_2 = p_2 - \varkappa_2, \quad p'_3 = p_3 - \varkappa_3, \tag{17}$$

а интегрирование по x и t приводит к интегралам типа ($i, k = 1, 2$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\varkappa_1 x} f'_i f_k = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{i\Omega^H_{ik}}}{(\lambda^3 - \lambda'^3)^{1/3}} \Phi(z^{ik}_H), \tag{18}$$

$$\int_0^t dt e^{i\varkappa t} g'^*_i g_k = \frac{2\sqrt{\pi}\, e^{i\Omega^{\mathscr{E}}_{ik}}}{\left[\frac{(e_0\mathscr{E})^2}{2}\left(\frac{1}{E'_{\perp}} - \frac{1}{E_{\perp}}\right)\right]^{1/3}} \Phi(z^{ik}_{\mathscr{E}}),$$

где для аргументов функций Эйри в ультрарелятивистском случае ($p_{\perp} \gg m$) с учетом того, что основной вклад в интеграл по конечному поперечному импульсу $p'_{\perp}$ дает область $p'_{\perp} \approx p_{\perp} - \varkappa$, находим значения:

$$z^{ik}_H \simeq z_H \pm \frac{2p_{\perp} - \varkappa - 2(p_{\perp} - \varkappa)\delta_{ik}}{e_0 H \varkappa a^2_H},$$

$$z^{ik}_{\mathscr{E}} \simeq z_{\mathscr{E}} \mp i\frac{\varkappa + 2(p_{\perp} - \varkappa)\delta_{ik}}{e_0\mathscr{E}\varkappa a^2_{\mathscr{E}}},$$

где

$$z_H = a_H \left(p_\perp - p'_\perp + \varkappa_2 - \frac{\varkappa_1^2}{2\varkappa} \right),$$

$$z_{\mathscr{E}} = a_{\mathscr{E}} \left(-p_\perp + p'_\perp + \varkappa + \frac{m^2 \varkappa}{2p_\perp (p_\perp - \varkappa)} - \frac{\varkappa_3^2}{2\varkappa} \right), \tag{19}$$

$$a_H = \left(\frac{2p_\perp (p_\perp - \varkappa)}{e_0^2 H^2 \varkappa} \right)^{1/3}, \quad a_{\mathscr{E}} = \left(\frac{2p_\perp (p_\perp - \varkappa)}{e_0^2 \mathscr{E}^2 \varkappa} \right)^{1/3},$$

δ_{ik} — символ Кронекера, а верхний знак соответствует $i=1$ (нижний знак — $i=2$).

Далее функции Эйри в матричных элементах (12) раскладываем по $\frac{H}{B_0} \ll 1$ и $\frac{\mathscr{E}}{B_0} \ll 1$.

Суммирование по конечному поперечному импульсу $p'_\perp$ в выражении для вероятности (11) заменяем интегрированием, которое производится методом, изложенным, например, в работе [6]:

$$\int\limits_0^\infty dp'_\perp \Phi^2(z_H)\, \Phi^2(z_{\mathscr{E}}) = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{\Phi_1(y)}{\sqrt{a_H a_{\mathscr{E}}}}, \tag{20}$$

$$\int\limits_0^\infty dp'_\perp \Phi^2(z_H)\, \Phi'^2(z_{\mathscr{E}}) = -\frac{\sqrt{\pi}}{16} \frac{(2\sin^2\alpha + 1)\, \Phi'(y) + y\Phi_1(y)}{(2\sin\alpha)^{2/3} \sqrt{a_H a_{\mathscr{E}}}},$$

где

$$\Phi(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\psi' e^{i\psi' y + i\frac{\psi'^3}{3}}, \quad \Phi_1(y) = \int\limits_y^\infty \Phi(x)\, dx, \tag{21}$$

а аргумент y может быть записан в инвариантном виде через тензор поля $F_{\mu\nu}$:

$$y = \left(\frac{u}{\chi} \right)^{2/3}, \quad u = \frac{\chi - \chi'}{\chi'}.$$

$$\chi = \frac{e_0}{m^3} \sqrt{-(F_{\mu\nu} p^\nu)^2} = \frac{p_\perp}{m} \frac{\sqrt{H^2 + \mathscr{E}^2}}{B_0}. \tag{22}$$

При вычислении интегралов (20) учтено также, что основной вклад в матричном элементе дает область углов

$$\theta_1^2 \sim \varphi_1^2 \sim \left(\frac{m}{p_\perp} \right)^2 \ll 1,$$

где

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \varphi. \tag{23}$$

В результате выражение $|e_\mu(i)\, \alpha^\mu|^2$ $(i=1,\ 2)$ после интегрирования по $p'_\perp$ оказывается с точностью до членов $\sim \theta_1^2,\ \varphi_1^2$ не зависящим от сферических углов импульса фотона.

Основной вклад в формирование функций $\Phi(y)$ и $\Phi_1(y)$ в (20), имеющих интегральное представление (21), дает область переменной ψ' вблизи точек стационарной фазы

$$\psi'_{1,2} = \pm i \sqrt{y}. \tag{24}$$

Отсюда с учетом области формирования интегралов (18), а также независимости правой части равенства (24) от φ_1 и θ_1 находим:

$$d\theta_1 = \frac{e_0 \mathscr{E}}{p_\perp} dt, \quad d\varphi_1 = \frac{2e_0 H}{\lambda^2} d\psi,$$

т. е. интеграл по φ в вероятности (11) пропорционален объему L_0 фазы ψ.

Суммируя далее по конечным составляющим импульса электрона p_2', p_3' с помощью законов сохранения (17), для спектрального распределения вероятности излучения в единицу времени получим:

$$\begin{Bmatrix} dw_1 \\ dw_2 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{8\sqrt{\pi}} \frac{e_0^2 m^2}{y p_\perp} \frac{u^2 du}{(1+u)^3} \left\{ \frac{1-\zeta\zeta'}{2} \begin{bmatrix} \Phi' + y\Phi_1 \\ 3\Phi' - y\Phi_1 - 4\zeta\sqrt{y}\Phi \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{1+\zeta\zeta'}{2} \begin{bmatrix} 3\left(\frac{2+u}{u}\right)^2 \Phi' - \left(1 - 4\frac{1+u}{u^2}\right) y\Phi_1 + 4\zeta \frac{2+u}{u} \sqrt{y}\Phi \\ \left(\frac{2+u}{u}\right)^2 (\Phi' + y\Phi_1) \end{bmatrix} \right\}, \quad (25)$$

$\Phi = \Phi(y)$.

Здесь индексы 1 и 2 соответствуют векторам поляризации $\vec{e}(1)$ и $\vec{e}(2)$, заданным формулами (14), (15), а ζ и ζ' определяют соответственно начальное и конечное состояние спина электрона.

Спектральное распределение вероятности излучения в параллельных полях, как видно из выражения (25), имеет ту же форму записи через инвариантную переменную u и параметр χ, что и спектральное распределение в постоянных и однородных электрическом или магнитном полях. Последнее может быть найдено в результате интегрирования по углам спектрально-углового распределения, полученного ранее в работе [1].

Таким образом, формула (25) описывает спиновые и поляризационные эффекты излучения квазиклассического электрона при условии (4) в произвольном постоянном внешнем поле с тензором $F_{\mu\nu}$, входящим в определение (22) переменной u и параметра χ.

Авторы глубоко благодарны А. А. Соколову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский В. Ч., Никитина Н. С. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., **14**, 94, 1973.
2. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М., 1962.
3. Синхротронное излучение. Сб. статей под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова. М., 1966.
4. Тернов И. М., Багров В. Г., Бордовицын В. А. «Изв. вузов», физика, № 4, 41, 1967.
5. Багров В. Г., Тернов И. М., Холомай Б. В. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 3, 1970.
6. Aspnes D. E. Phys. Rev., **147**, 554, 1966.

Поступила в редакцию
5.4 1972 г.

Кафедра
теоретической физики