Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1974

УДК 538.587.43

А. Х. МУССА, Ю. Г. ПАВЛЕНКО, В. И. ПЕТУХОВ

ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ, ДВИЖУЩИХСЯ В ОНДУЛЯТОРАХ

В работе исследуется возможность использования ондулятора в качестве источника индуцированного излучения.

При движении релятивистских частиц в ондуляторах — приборах с периодически изменяющимися вдоль траектории магнитными или электрическими полями, возникает излучение в диапазоне от миллиметровых волн до видимого света [1]. Теоретические исследования спонтанного излучения показали, что при $\alpha\gamma \ll 1$ (α — полный угол отклонения электронов в поле, $E = mc^2\gamma$ — энергия электронов) максимум излучения приходится на первую гармонику [2, 3], а при $\alpha\gamma \gg 1$ ($\alpha \ll 1$) смещается в область высоких гармоник [4, 5]. В настоящей работе исследуется возможность использования ондулятора в качестве источника индуцированного излучения.

Интенсивность индуцированного излучения при переходах между стационарными состояниями определяется выражением [6]

$$dP(\omega, \vec{n}) = \sum_{i,f,\lambda} \{ |M_{if}^{\lambda}|^2 g(\omega - \omega_{if}) - |M_{fi}^{\lambda}|^2 g(\omega - \omega_{fi}) \} \rho_i I_\lambda(\omega, \vec{n})\, d\omega d0. \tag{1}$$

Здесь $I_\lambda(\omega, n)$ — спектральная плотность энергии внешнего излучения с поляризацией λ, ρ_i — заселенность i-го состояния,

$$M_{fi} = e\sqrt{\frac{2\pi c}{\hbar\omega}} \int \bar{u}_f \hat{e}_\lambda^* u_i e^{-i\vec{k}\vec{r}}\, dr \tag{2}$$

матричный элемент перехода между состояниями i и f с испусканием фотона поляризации λ. Фактор $g_\tau(x) = \frac{4\tau}{1 + 4\tau^2 x^2}$ учитывает уширение уровней, обязанное конечному времени жизни τ, которое мы будем предполагать не зависящим от квантовых чисел начального и конечного состояний. При вычислении матричного элемента (2) для переходов между интересующими нас состояниями с большими квантовыми числами можно воспользоваться модификацией квазиклассического метода рассмотрения процесса излучения во внешних полях [7]. В основе метода лежит тот факт, что квантовые эффекты при излучении связаны с квантовым характером движения электрона и квантовой отдачей при излучении. Поскольку при больших энергиях электрона в начальном и конечном состояниях квантовые эффекты первого типа малы по сравнению с эффектами второго типа, то можно рассматривать движение электрона по классической траектории, учитывая только величины $\sim\hbar\omega/E$.

В используемом нами приближении эффект квантовой отдачи также учитывается с точностью до $\hbar\omega/E$, однако движение электрона описывается в терминах квантового состояния.

Представим волновую функцию в виде

$$\psi(r,\ t)=e^{-\frac{iE}{\hbar}t}\,u(r),$$

$$u(r)=\left(\hat{p}-\frac{e}{c}\hat{A}+mc^2\right)u'(r). \qquad (3)$$

Для состояний с большими квантовыми числами в квадрированном уравнении Дирака

$$\left[\left(p-\frac{e}{c}A\right)^2-m^2c^2-\frac{\hbar}{2}e\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]u'(r)=0 \qquad (4)$$

можно отбросить члены типа спин-поле. В этом случае $u'(r)$ может быть представлена в виде

$$u'(r)=\frac{1}{\sqrt{2E}}\Phi(r)W, \qquad (5)$$

где W — постоянный спинор, определяющий спиновые состояния электрона ($W_3=W_4=0$), Φ — функция, подчиняющаяся уравнению Клейна — Гордона. Тогда матричный элемент (2) значительно упрощается:

$$M_{fi}=e\sqrt{\frac{2\pi c}{\hbar\omega}}\,W_f\,(a_ie_i^*+i\varepsilon_{ikl}e_i^*\sigma_l)\,W_i, \qquad (6)$$

$$a=\beta_{fi}\left(1+\frac{\hbar\omega_{fi}}{2E_i}\right)-c\frac{\hbar\,(\vec{k})_{fi}}{2E_i}, \qquad (7)$$

$$b=-\beta_{fi}\frac{\hbar\omega_{fi}}{2(E_i+mc^2)}\,\frac{c\hbar\,(\vec{k})_{fi}}{2E_i}.$$

Здесь

$$\beta_{fi}=\frac{c}{E}\int\Phi_f^*\left(\hat{p}-\frac{e}{c}\hat{A}\right)\Phi_ie^{-i\vec{k}\vec{r}}\,dr \qquad (8)$$

$$(\vec{k})_{fi}=\int\Phi_f^*\vec{k}\Phi_ie^{-i\vec{k}\vec{r}}\,dr.$$

Предположим, что в начальном состоянии имеется N электронов энергии $E_i=E$, импульсы p которых одинаковы. Тогда первое слагаемое в (1) определяет мощность излучения при переходах $E_i\to E_f<E_i$, а второе — мощность поглощения при переходах $E_i\to E_f>E_i$. Реально наблюдаемой величиной является разность этих мощностей.

Поскольку после усреднения по спиновым состояниям начального электрона и суммирования по спинам конечного

$$\frac{1}{2}\sum_{s_i, s_f} |M_{fi}^{\lambda}|^2 = \frac{2\pi e^2 c}{\hbar\omega}\{|a e_{\lambda}^{*}|^2 + |[e_{\lambda}^{*} b]|^2\},$$

то при вычислении выражения для интенсивности излучения (1), не зависящего от $\hbar$, в матричном элементе (6) достаточно оставить только первый член. Кроме того, все величины, входящие в (1), необходимо разложить по степеням $\hbar$, оставляя только линейные по $\hbar$ слагаемые:

$$\beta_{fi} = \beta_{fi}^{(0)} \mp \beta_{fi}^{(1)} + \ldots$$

$$g(\omega - |\omega_{if}'|) = g(x) + 2\tau\frac{\partial g}{\partial x}\omega^{(1)}, \qquad x = 2\tau(\omega - \omega^{(0)}),$$

где $|\omega_{if}| = \omega^{(0)} \mp \omega^{(1)}$ находится из законов сохранения, следующих из (8). Верхние знаки относятся к переходам с излучением, нижние для переходов с поглощением кванта частоты ω. Окончательно (1) можно представить в виде

$$\frac{dP_{\lambda}}{d\omega d0} = \sum_{f} 16\pi e^2 c I_{\lambda}(\omega, \vec{n})\left[\frac{G_{\lambda}(\omega)}{1+x^2} - \frac{4\tau x F_1(\omega)}{(1+x^2)^2}\right], \tag{9}$$

$$G_{\lambda}(\omega) = \frac{1}{\hbar\omega}\left[\frac{\hbar\omega^{(0)}}{E}|\beta_{fi}^{(0)} e_{\lambda}^{*}|^2 - Re(\beta_{fi}^{(1)} e_{\lambda}^{*})(\beta_{fi}^{(1)} e_{\lambda}^{*})^{*}\right], \tag{10}$$

$$F_{\lambda}(\omega) = \frac{1}{\hbar\omega}\omega^{(1)}(\beta_{fi}^{(0)} e_{\lambda}^{*})^2. \tag{11}$$

1. Излучение релятивистских электронов в магнитном поле вида $H_z = H\sin ay$. В этом случае волновая функция имеет вид

$$\Phi(r) = \frac{1}{\sqrt{L_x L_z}} e^{i\frac{p_x}{\hbar}x + i\frac{p_z}{\hbar}z}\, Y(y),$$

где функция $Y(y)$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{\hbar^2}p^2(y)Y(y) = 0,$$

$$p^2(y) = \frac{E^2}{c^2} - m^2c^2 - p_z^2 - \left(p_x - \frac{eH}{ac}\sin ay\right)^2. \tag{12}$$

Поскольку движение электрона носит квазиклассический характер, то решение уравнения (12) может быть найдено методом ВКБ:

$$Y(y) = \frac{1}{\sqrt{L_y}}\frac{1}{\sqrt{P(y)}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int P(y)\,dy\right]. \tag{13}$$

Следует иметь в виду, что обычный метод ВКБ при

$$E > U_{\max} = \left[m^2c^4 + p_z^2c^2 + c^2\left(p_x + \frac{eH}{ac}\right)^2\right]^{1/2}$$

дает качественно неточный результат — он не улавливает теоретически щели, которые существуют в спектре частицы, находящейся в периодическом поле. Однако, как показано в [8], ширина щелей экспоненциально мала. Поэтому спектр релятивистских частиц можно считать непрерывным и для вычисления матричных элементов (8) использовать решение (13).

В интересующем нас случае, когда скорость электрона в направлении оси ондулятора близка к скорости света, а разброс начальных импульсов p_x и p_z мал (т. е. $|p_x|$, $|p_z| \ll |p_y|$), матричный элемент (8) равен

$$\beta_{fi} = \sum_s \frac{c}{E} \left\{ P_x A_0 + \frac{eH}{ac} A_1,\ p_0 A_0,\ p_z A_0 \right\} \delta_{p_x', p_x - \hbar k_x} \times \times \delta_{p_0', p_0 - \hbar(k_y + sa)} \cdot \delta_{p_z', p_z - \hbar k_z}. \quad (14)$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^n x \exp[-i\Delta_1 \sin x + i\Delta_2 \sin 2x + isx]\, dx,$$

$$\Delta_1 = \frac{eH}{c^2 a^2 \hbar} \left(\frac{p_x}{p_0} - \frac{p_x'}{p_0'} \right), \quad \Delta_2 = \frac{1}{\hbar} \left(\frac{eH}{2ca} \right)^2 \left(\frac{1}{p_0'} - \frac{1}{p_0} \right), \quad (15)$$

$$p_0 = p_y - \left(\frac{eH}{2cap_y} \right)^2.$$

Из (14) и (15) находим, что $\beta_{fi}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\partial \beta_{fi}}{\partial p_k'} \Delta p_k'$, а из законов сохранения (14) следует, что $\omega^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\partial \omega^{(0)}}{\partial p_k'} \Delta p_k'$, $\omega^{(0)} = \frac{\partial E}{\partial p_k'} \Delta p_k'$. Вычисляя $\omega^{(0)}$, находим, что $x = 2\tau(\omega\Delta - s\Omega_0)$, где $\Omega_0 = \frac{ap_0}{E}$, а $\Delta = 1 - n_x \frac{cp_x}{E} - n_y \frac{cp_0}{E} - n_z \frac{cp_z}{E}$ — доплеровский множитель. Следовательно, g-фактор в (9) имеет резкий максимум на частоте $\omega = \frac{s\Omega_0}{\Delta}$. Спектральное распределение интенсивности излучения (9) существенно зависит от соотношения между углом $\Delta\psi \sim \frac{mc^2}{E}$, в котором сосредоточена основная часть излучения, и полным углом $\xi \sim \frac{eH}{ap_0}$ отклонения электрона при пролете через ондулятор. Формулы (14) и (15) имеют место при произвольных значениях $\Delta\psi\xi$. Мы ограничимся рассмотрением случая $\Delta\psi \cdot \xi \ll 1$ ($p_x = p_z = 0$). При этом $A_0 \simeq \frac{\Delta_1}{2} \delta_{s1}$, $A_1 \simeq \frac{1}{2} \delta_{s1}$, а наибольшая частота излучается в направлении оси ондулятора. Для описания поляризации введем два орта $e_\varphi(\cos\varphi, 0, -\sin\psi)$ и $e_\psi = (\cos\psi \sin\varphi, -\sin\psi, \cos\psi\cos\varphi)$ в плоскости, перпендикулярной направлению распространения $n = (\sin\psi\sin\varphi, \cos\psi, \sin\psi\cos\varphi)$.

Учитывая сделанные выше приближения из (10) и (11), найдем

$$G_\varphi = \frac{1}{4E^3} \frac{\omega^{(0)}}{\omega} c^2 p_0^2 \xi^2 \cos^2\varphi,$$

$$G_\psi = \frac{1}{4E} \frac{\omega^{(0)}}{\omega} \xi^2 \sin^2\varphi \left(\cos\psi - \frac{\omega}{ca} \sin^2\psi \right) \left[-\frac{2\omega}{ca} \sin^2\psi + \frac{c^2 p_0^2}{E^2} \left(\cos\psi - \frac{\omega}{ca} \sin^2\psi \right) \right], \quad (16)$$

$$F_\varphi = \frac{1}{4E^2} \frac{\omega^{(1)}}{\hbar\omega} c^2 p_0^2 \xi^2 \cos^2\varphi,$$

$$F_{\psi}=\frac{1}{4E^{2}}\frac{\omega^{(1)}}{\hbar\omega}\xi^{2}c^{2}p_{0}^{2}\sin^{2}\varphi\left(\cos\psi-\frac{\omega}{ca}\sin^{2}\psi\right)^{2}. \tag{17}$$

Условия, при которых становится возможным индуцированное излучение, существенным образом зависят от спектрально-угловых характеристик внешнего излучения. Рассмотрим подробно один частный случай, когда спектр возбуждения расположен в узкой области частот с полушириной вблизи частоты $\omega=\Omega_0/\Delta$.

Тогда из (9) найдем

$$p_{\lambda}=\frac{8\pi e^{2}}{\Delta\omega}\int G\left(\frac{\Omega_{0}}{\Delta}\right)u_{\lambda}(n)\,dO, \tag{18}$$

где $u_{\lambda}(\vec{n})$ — угловой спектр внешнего излучения. Результат интегрирования (18) зависит от соотношения между шириной ΔO — углового спектрального распределения u_{λ} и шириной области, в которой $G_{\lambda}\left(\frac{\Omega_{0}}{\Delta}\right)>0$. Предположим, что

$$u_{\lambda}(\vec{n})=\frac{I\Delta\psi\Delta\varphi}{2\pi^{2}}\frac{1}{(\varphi-\pi/2+\delta)^{2}+\dfrac{\Delta\varphi^{2}}{4}}\cdot\frac{1}{(\cos\psi-\cos\psi_{0})^{2}+\dfrac{\Delta\psi^{2}}{4}}, \tag{19}$$

где $\delta\ll 1$, $\psi_0\ll 1$, $\Delta\psi\cdot\gamma\ll\frac{1}{6}$. В этом случае из (16) и (18) следует:

$$P_{\varphi}=\frac{2\pi e^{2}c^{2}p_{0}^{2}\delta^{2}}{\Delta\omega E^{3}}\xi^{2}I,$$

$$P_{\psi}=\frac{2\pi e^{2}cp_{0}}{\Delta\omega E^{2}}\xi^{2}\frac{1-\gamma^{2}\psi_{0}^{2}}{(1+\gamma^{2}\psi_{0}^{2})^{2}}\left[\frac{cp_{0}}{E}-\gamma^{2}\psi_{0}^{2}\left(4+\frac{cp_{0}}{E}\right)\right]I. \tag{20}$$

2. Излучение релятивистских электронов в магнитном поле вида $H=(-H\sin ay,\ o,\ -H\cos ay)$.

Классический расчет показывает, что при начальных условиях

$$\vec{r}(0)=o,\qquad \vec{v}(0)=\left(o,\ \dot{y}_{0},\ \frac{\Omega}{a}\right)\ \text{и}\ \left(\Omega=\frac{eHc}{E}\right)$$

траектория является винтовой линией, ось которой параллельна оси y. Мы ограничимся рассмотрением подобного движения в квантовом случае, предполагая, что $|p_x|,\ |p_z|\ll|p_y|$. При выполнении этих условий матричный элемент (8) имеет вид

$$\beta_{fi}=\sum_{s}\left\{\beta_{x}I_{s}+\frac{\Omega}{ac}\left(\frac{s}{A}\sin\varphi I_{s}+i\cos\varphi I_{s}'\right),\quad\beta_{y}I_{s},\right. \tag{21}$$

$$\left.\beta_{z}I_{s}+\frac{\Omega}{ac}\left(\frac{s}{A}\cos\varphi I_{s}-i\sin\varphi I_{s}'\right)\right\}\delta_{p_{x}',p_{x}-\hbar k_{x}}\,\delta_{p_{y}',p_{y}-\hbar(k_{y}+sa)}\,\delta_{p_{z}',p_{z}-\hbar k_{z}},$$

$$A=\sqrt{\Delta_{1}^{2}+\Delta_{2}^{2}},\qquad \Delta_{1}=\frac{\Omega E}{c^{2}a^{2}\hbar}\left(\frac{p_{x}}{p_{y}}-\frac{p_{x}'}{p_{y}'}\right),$$

$$\Delta_{2}=\frac{\Omega E}{c^{2}a^{2}\hbar}\left(\frac{p_{z}}{p_{y}}-\frac{p_{z}'}{p_{y}'}\right)$$

аргументом функции Бесселя в (21) является величина A. Вычисляя $\omega^{(0)}$, найдем, что $x=2\tau(\omega\Delta-s\Omega_0)$, где $\Delta_0=a\beta_y c$, и, следовательно, выражение (9) имеет максимум при $\omega = \frac{s\Omega_0}{\Delta}$. Учитывая (21), из (10) и (11) найдем в дипольном приближении

$$G_\varphi = \frac{1}{4E}\frac{\omega^{(0)}}{\omega}\xi^2\beta_y^2, \tag{22}$$

$$G_\psi = \frac{1}{4E}\frac{\omega^{(0)}}{\omega}\xi^2\beta_y^2\left(\cos\psi - \frac{\omega}{\Omega_0}\beta_y\sin^2\psi\right)\left[\cos\psi - \frac{\omega}{\Omega_0}\frac{1+\beta_y^2}{\beta_y}\sin^2\psi\right],$$

$$F_\varphi = \frac{1}{4E}\frac{\omega^{(1)}}{\hbar\omega}\xi^2,$$

$$F_\psi = \frac{1}{4E}\frac{\omega^{(1)}}{E}\frac{\omega}{\Omega_0}\xi^2\left(\frac{\Omega_0}{\omega}\cos\psi - \beta_y\sin\psi\right). \tag{23}$$

Предполагая, что спектр внешнего излучения лежит в узкой области частот $\Delta\omega \ll \frac{\Omega_0}{\Delta}$ вблизи значения частоты $\frac{\Omega_0}{\Delta}$, получим для интенсивности выражение, аналогичное (18). Поскольку выражение (22) не зависит от азимутального угла φ, угловой спектр внешнего излучения можно взять в виде

$$u_\lambda(\vec{n}) = \frac{I\Delta\psi}{\pi}\frac{1}{(\cos\psi - \cos\psi_0)^2 + \Delta\psi^2/4},$$

где $\psi_0 \ll 1$, $\Delta\psi\cdot\gamma \ll \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тогда интенсивности индуцированного излучения двух компонентов поляризации равны

$$P_\varphi = \frac{2\pi e^2}{\Delta\omega E}\beta_y^2\xi^2 I,$$

$$P_\psi = \frac{2\pi e^2}{\Delta\omega E}\beta_y^2\xi^2\frac{1-\gamma^2\psi_0^2}{1+\gamma^2\psi_0^2}(1-3\gamma^3\psi_0^2). \tag{24}$$

Пример. Пусть ондулятор с периодом $l=10$ *см*, $E=1$ *гэв* ($\gamma\simeq 2\cdot 10^3$).

При этом $\omega\approx 7{,}5\cdot 10^{16}$ *гц*. Тогда условие дипольности ($\gamma\xi\ll 1$) выполняется при $H\ll 10^3$ *э*.

Если $l=10$ *см*, $E=5$ *Мэв* ($\gamma\simeq 10$), то $\omega\simeq 1{,}8\cdot 10^{12}$ *гц*, $\lambda\simeq 10^{-1}$ *см*. Заметим, что выражения в (20) и (24) для интенсивности ψ-компонента p_ψ при $\psi_0=0$ совпадают между собой.

В заключение авторы выражают благодарность проф. А. А. Соколову за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моц. Миллиметровые и субмиллиметровые волны. М., 1959, стр. 194.
2. Корхмозян Н. А. «Изв. АН Арм ССР», физика, **5**, 287, 418, 1970.
3. Алферов Д. Ф., Башмаков Ю. А., Бессонов Е. Г. ЖТФ, **42**, 1991, 1972.
4. Павленко Ю. Г., Петухов В. И., Мусса А. Х. «Изв. вузов», физика (в печати).
5. Мусса А. Х., Павленко Ю. Г., Петухов В. И. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон. (в печати).
6. Файн В. М., Ханин Я. И. Квантовая радиофизика. М., 1965.
7. Байер В. Н. «Успехи физических наук», **105**, 441, 1971.
8. Дыхне А. М. ЖЭТФ, **40**, 1423, 1961.

Поступила в редакцию
7.5 1972 г.

Кафедра
квантовой статистики