

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 2 — 1974

УДК 621.373.7.001.5

А. Н. ЛАГУТКИН

К ТЕОРИИ МНОГОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ С НЕЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ, ХАРАКТЕРИСТИКА КОТОРОГО АППРОКСИМИРУЕТСЯ ЛОМАНОЙ КРИВОЙ

Методом медленно меняющихся амплитуд исследуются многочастотные колебательные процессы в системах, содержащих нелинейные элементы, характеристики которых аппроксимируются ломаной кривой. Показано, что такие системы обладают свойствами как систем с резким изменением нелинейности, так и систем с плавным изменением нелинейности.

Введение

Количество колебательных систем, в которых характеристики нелинейных элементов аппроксимируются ломаной кривой, весьма велико. В настоящей работе в качестве примера подобных систем, рассмотрим параметрические генераторы, уделяя основное внимание анализу диссипативного механизма ограничения колебаний в одночастотном параметрическом генераторе. Этот механизм ограничения связан с увеличением потерь в нелинейном элементе при возрастании амплитуд генерации.

При этом, если потери увеличиваются достаточно плавно с ростом амплитуды колебания, для аппроксимации диссипативной характеристики нелинейного элемента можно ограничиться несколькими членами ряда Тейлора ([1] и библиография к ней).

Однако в случае использования нелинейных элементов с резкой вольт-амперной характеристикой такая аппроксимация становится несправедливой. Под резкой характеристикой здесь понимается характеристика нелинейного элемента, в котором потери резко возрастают при достижении общим напряжением на нем некоторого уровня U_0 . В связи с этим величина максимального напряжения на нелинейном элементе (полупроводниковом диоде) не может превышать значения U_0 . Таким образом, резкая вольт-амперная характеристика диода фактически является ступенчатой функцией напряжения (сплошная линия на рис. 1) [2, 3].

Зависимости стационарных амплитуд для случая плавно-увеличивающихся потерь в системе [1] и резко увеличивающихся потерь [2, 3]

существенно отличаются друг от друга. Кроме того, характеристики реальных элементов не имеют абсолютно резкого характера, а обладают некоторым интервалом изменения напряжения $[0, U_0]$, в пределах которого потери в генераторе изменяются от малых до значительных (пунктирная линия на рис. 1). В связи с этим представляет интерес изучение поведения систем с нелинейным элементом, диссипативная характеристика которого аппроксимируется выражением типа

$$i(U) = \begin{cases} \sum_{m=1}^N k_m [v(t) - E]^m / U_0^m & \text{при } v(t) > E, \\ 0 & \text{при } v(t) < E, \end{cases} \quad (1)$$

т. е. обладает признаками резкой и плавной характеристик. Здесь $U = v(t) - E$, $v(t)$ — полное и переменное напряжения на p - n -переходе диода, E — величина смещения, k_m — крутизна m -й параболы; m может быть как целым, так и дробным числом¹; $U_0 \ll E$ — характерная величина нелинейной характеристики.

Так как в системах с нелинейными элементами, обладающими характеристиками (1), потери быстро возрастают при $U(t) = U_0$, то $\max U(t)$ не может намного превышать уровень U_0 . При этом, если для всех B_k -амплитуд гармонических компонентов, присутствующих в системе $B_k \gg U_0$, то замена характеристики (1) на резкую [2] приводит лишь к малой ошибке в определении B_k , порядка $U_0/B_k \ll 1$. Следовательно, поведение систем будет зависеть от наличия в характеристике (1) интервала плавного увеличения потерь $-[0, U_0]$ лишь в том случае, когда хотя бы одна из амплитуд $B_{k_0} \sim U_0$.

Таким образом можно утверждать, что отличие систем с резкой характеристикой [2] от систем с характеристикой вида (1) связано с тем, что одна из амплитуд гармонических компонентов, присутствующих в системе, сравнима по величине с U_0 .

Однако, если $B_{k_0} \sim U_0$, то системы, содержащие нелинейные элементы с характеристикой (1), должны бы вести себя подобно системам с плавно изменяющимися потерями [1]. Но это не так ввиду того, что в системе присутствуют гармонические компоненты напряжения с амплитудами $B_k \gg U_0$ ($k \neq k_0$). Эти колебания в определенные моменты времени «подводят» k_0 -тый компонент к уровню отпирания нелинейного элемента ($U=0$). Следовательно, в эти моменты времени k_0 -тый компонент получает возможность активно управлять отпиранием нелинейного элемента, в результате чего в системе резко возрастает затухание.

§ 1. Вычисление амплитуд гармоник тока²

При составлении укороченных уравнений приходится вычислять амплитуды гармоник тока. При этом основная трудность заключается в нахождении времен отпирания нелинейного элемента. В том случае, когда $B_H \gg B \sim U_0$ (B_H, B — амплитуды накачки и генерируемого компонента), уравнение для нахождения моментов отсечки удобно записать в следующем виде:

$$\cos \Phi_H = \frac{E}{B_H} - \frac{B}{B_H} \cos \left(\frac{\Phi_H}{2} - \frac{\alpha}{2} \right). \quad (2)$$

¹ Для того чтобы первая производная не претерпевала бесконечно большого скачка в нуле, будем считать, что суммирование в (1) начинается с $m \geq 1$.

² Как и в работах [2, 3], будем рассматривать лишь назкочастотный случай, когда влиянием диффузионной емкости можно пренебречь [4].

Здесь $\Phi_H = \omega_H t + \varphi_H$, $\alpha = \varphi_H - 2\varphi$, ω_H , φ_H — частота и фаза колебания накачки, φ — фаза генерируемого колебания.

Учитывая, что отпирание нелинейного элемента наблюдается примерно при $\Phi_H \simeq 2\pi n$ (n — целое), разложим тригонометрические функции в уравнении (2) в ряд по степеням $(\Phi_H - 2\pi n)$. Ограничиваясь квадратичным членом и решая полученное уравнение, получим

$$\Phi_H^{(n)} - 2\pi n = \pm \sqrt{2 \left(1 - \frac{E}{B_H}\right) - (-1)^n \frac{B}{B_H} \cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (3)$$

Здесь $n=0,1$ показывает, что в общем случае в одночастотном параметрическом генераторе нелинейный элемент отпирается дважды за период возбуждшегося колебания.

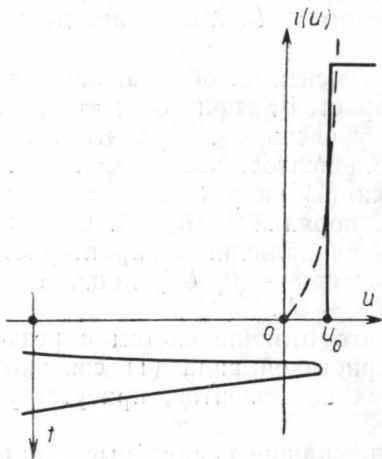


Рис. 1

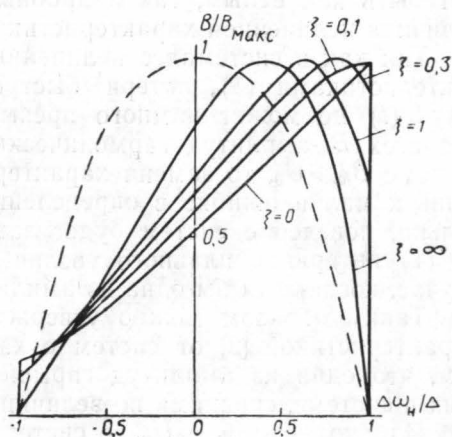


Рис. 2

Зная выражения для времен отсечки (3), можно уже легко вычислить амплитуды гармоник тока, а следовательно, составить укороченные уравнения.

Учитывая вид вольт-амперной характеристики (1), для амплитуд гармоник тока с точностью до членов второго порядка малости относительно $(\Phi_H - 2\pi n)$ запишем следующие выражения:

$$i_{\{s\}}^{(c)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} i(U) \left\{ \begin{array}{l} \cos \left(\frac{\Phi_H}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{\Phi_H}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \end{array} \right\} d\Phi_H =$$

$$= \sum_{m=1}^N \frac{k_m}{2\sqrt{2}\pi} \cdot \frac{B_H^m}{U_0^m} \sum_{n=0}^1 (-1)^n \left[1 - \frac{E}{B_H} + (-1)^n \frac{B}{B_H} \cos \frac{\alpha}{2} \right]^{\frac{2m+1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\alpha}{2} \\ -\sin \frac{\alpha}{2} \end{array} \right\}. \quad (4)$$

Из выражения (4) нетрудно установить, что отношение i_c/i_s для случая, рассматриваемого в настоящей работе, остается таким же, как в случае резкой характеристики ($B_H \gg B$) [3]:

$$\frac{i_c}{i_s} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}. \quad (5)$$

§ 2. Укороченные уравнения. Режим возбуждения колебаний

Рассмотрим колебательные процессы в одночастотном параметрическом генераторе с резонансом параллельного типа на собственной частоте. Будем считать, что величина смещения E и амплитуда накачки B_H фиксированы и что B_H намного превосходит амплитуду генерируемого компонента B . Таким образом, расстройочным механизмом ограничения можно пренебречь и считать, что в системе действует лишь диссипативный механизм ограничения колебаний [3]. В этом случае укороченные уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{B} + hB - \frac{\Delta}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{\Delta}\right)^2} B \sin \alpha + \alpha_0 i_c &= 0, \\ B\dot{\varphi} + B \frac{\Delta\omega_H}{2} + \frac{\Delta}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{\Delta}\right)^2} B \cos \alpha - \alpha_0 i_s &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь h — полуполоса пропускания холодной системы, Δ — полуполоса генерации, $\Delta\omega_H$ — линейная расстройка по частоте накачки [1], α_0 — коэффициент связи [2].

Если возбуждающееся колебание настолько мало, что приводит лишь к небольшим изменениям угла отсечки, то выражение (4) можно разложить в ряд Тейлора по степеням B . Тогда с точностью до членов порядка $O(B^2)$ для амплитуд гармоник тока получим

$$i_{[s]}^{[c]} = \sum_{m=1}^N \frac{k_m}{2\sqrt{2}\pi} \cdot \frac{B_H^m}{U_0^m} \left(1 - \frac{E}{B_H}\right)^{\frac{2m-1}{2}} \cdot \frac{2m+1}{2} \frac{B}{B_H} \cos \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ -\sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Как и в работе [1], выражение (7) формально можно разделить на две части, одна из которых будет зависеть от α и отвечать за изменение модуляционного члена, другая не будет зависеть от α (диссипация в системе). Из (7) следует, что обе эти части при B в первой степени равны между собой. В этом случае, используя (6) и (7), нетрудно убедиться, что условие возбуждения при нулевом холодном затухании не будет зависеть от наличия в системе нелинейного активного элемента, а будет определяться свойствами лишь реактивного нелинейного элемента:

$$\sigma_{\text{эф}}^p \geq (\Delta\omega_H)^2. \quad (8)$$

Здесь $\sigma_{\text{эф}}^p$ — эффективный коэффициент модуляции реактивного элемента [1].

Если же холодное затухание не будет равно нулю, то условие возбуждения переписется в виде

$$\sigma_{\text{эф}}^p + \sigma_{\text{эф}}^a \geq (2h + 2h^*)^2 + (\Delta\omega_H)^2. \quad (9)$$

Здесь $\sigma_{\text{эфф}}^a$ — эффективный коэффициент модуляции активной проводимости, $(2h^*)$ — полоса пропускания, обусловленная наличием в системе нелинейной активной проводимости. При этом $(2h^*)^2 = \sigma_{\text{эфф}}^a$. Следовательно:

$$\sigma_{\text{эфф}}^p \geq (2h)^2 + 2(2h)(2h^*) + (\Delta\omega_n)^2. \quad (10)$$

Таким образом, полоса генерации при включении нелинейного активного элемента либо уменьшается (10), либо не изменяется (8).

§ 3. Режим стационарных колебаний

Предположим, что в системе установился колебательный режим, который описывается укороченными уравнениями (6). Тогда принимая во внимание (5), из уравнений (6) для фазы α получим выражение, которое зависит только от $\Delta\omega_n$:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{\Delta\omega_n}{\Delta} + \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{\Delta}\right)^2}}{\frac{2h}{\Delta}}. \quad (11)$$

Здесь величина $2h/\Delta$ характеризует степень регенерации системы [3]. Таким образом, для нахождения величины B получаем следующее уравнение:

$$\frac{i_c(B, \alpha)}{B} = \frac{h}{\alpha_0} \frac{1 - \left(\frac{\Delta\omega_n}{\Delta}\right)^2}{\left(\frac{2h}{\Delta}\right)^2 + \left[\frac{\Delta\omega_n}{\Delta} + \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{\Delta}\right)^2}\right]^2}, \quad (12)$$

в левую часть которого надо подставить вместо фазы α ее значение, даваемое выражением (11).

Ввиду того что при учете (4) получить зависимости стационарных амплитуд от расстройки из (12) весьма затруднительно, представляется целесообразным рассмотреть следующие частные случаи. Во первых, изменение стационарных характеристик системы при изменении коэффициента крутизны параболы. Во вторых, изменение характеристик системы при изменении степени аппроксимирующей параболы. В третьих, выяснить влияние различных аппроксимирующих парабол на поведение стационарных зависимостей амплитудных характеристик.

Предположим, что вольт-амперная характеристика диода аппроксимируется выражением типа

$$i(U) = \begin{cases} k_m [v(t) - E]^m / U_0^m & \text{при } v(t) > E, \\ 0 & \text{при } v(t) < E. \end{cases} \quad (13)$$

В этом случае для определения $B(\Delta\omega_n)$, учитывая (4) и (12), получим следующее уравнение:

$$B = (E - B_n) \frac{\Delta}{2h} \sqrt{\left(\frac{2h}{\Delta}\right)^2 + \left[\frac{\Delta\omega_n}{\Delta} + \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{\Delta}\right)^2}\right]^2} \times$$

$$\times \left[1 + \left\{ \xi_m \left[\frac{B}{E - B_H} \cdot \frac{2h}{\Delta} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 1 - \left(\frac{\Delta\omega_H}{\Delta} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{2}{2m+1}} \right] \\ \times \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2h}{\Delta} \right)^2 + \left[\frac{\Delta\omega_H}{\Delta} + \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{\Delta} \right)^2} \right]^2}} \quad (14)$$

Здесь $\xi_m = [V\bar{B}_H U_0^m \pi \Delta^2 (E - B_H) / V 2k_m \alpha_0 h]^{\frac{2}{2m+1}} / (E - B_H)$. Величина, стоящая в фигурных скобках, характеризует степень отличия амплитудных

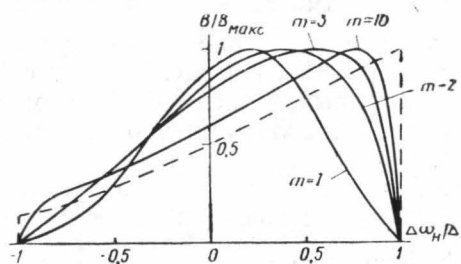


Рис. 3

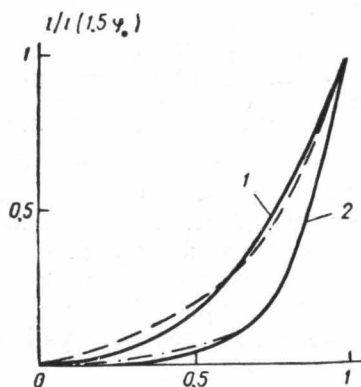


Рис. 4

характеристик в системах, нелинейные элементы которых обладают конечной крутизной характеристики, от характеристик систем, обладающих нелинейными элементами с характеристикой бесконечной крутизны. Если этот член мал по сравнению с единицей, то уравнение (14) можно решать методом последовательных приближений. В этом случае запишем

$$\frac{B}{E - B_H} = \frac{\Delta}{2h} \sqrt{\left(\frac{2h}{\Delta} \right)^2 + \left[\frac{\Delta\omega_H}{\Delta} + \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{\Delta} \right)^2} \right]^2} \times \\ \times \left[1 + \xi_m \left(1 - \left(\frac{\Delta\omega_H}{\Delta} \right)^2 \right)^{\frac{2}{2m+1}} \right]. \quad (15)$$

На рис. 2 кривые (15), нормированные на максимальное значение амплитуды, построены для различных значений ξ_m при $m = 2$ ($\frac{2h}{\Delta} = 0,3$).

Из этого рисунка видно, что по мере увеличения ξ_m кривые все более отходят от зависимости для резкой вольт-амперной характеристики ($\xi_m = 0$) и приближаются к амплитудной зависимости в случае аппроксимации вольт-амперной характеристики параболой с конечным коэффициентом наклона (13) (этой кривой формально соответствует ξ_m , равное ∞). При этом амплитудные зависимости по мере увеличения ξ_m все более приближаются к амплитудным зависимостям, которые харак-

терны для плавного диссипативного механизма ограничения [1] (пунктирная кривая на рис. 2), однако максимальное значение B остается все же смещенным в сторону больших расстроек (см. Введение).

Предположим, что вольт-амперная характеристика диода аппроксимируется параболой m -ной степени с отсечкой (13). В том случае, когда в выражении (14) величина, стоящая в фигурных скобках, намного превосходит единицу, уравнение (14) легко разрешается относительно B :

$$\frac{B}{U_0} = \left(\frac{\Delta}{2h}\right)^{\frac{2m+3}{2m-1}} \left[\frac{2\sqrt{2}\pi h \sqrt{U_0 B_H}}{\alpha_0 k_m} \left(1 - \left(\frac{\Delta\omega_H}{\Delta}\right)^2\right) \right]^{\frac{2}{2m-1}} \times \\ \times \sqrt{\left(\frac{2h}{\Delta}\right)^2 + \left[\frac{\Delta\omega_H}{\Delta} + \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{\Delta}\right)^2}\right]^2}. \quad (16)$$

На рис. 3 кривые (см. (16)), нормированные на максимальное значение B , построены для различных степеней аппроксимирующей параболы $\left(\frac{2h}{\Delta} = 0,3\right)$. По мере увеличения m вольт-амперная характеристика все более приближается к функции, которая примерно равна нулю на отрезке $0 \leq U < U_0$ и резко возрастает при $U = U_0$. На рис. 3 этому процессу соответствует приближение амплитудных зависимостей по мере увеличения m к кривой, отвечающей резкой вольт-амперной характеристике (пунктирная линия на рис. 3).

Обычно при аппроксимации характеристики нелинейного элемента полиномом с отсечкой ограничиваются двумя членами [5]:

$$f(x) \simeq \begin{cases} k_1 x^2 + k_2 x^3 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (17)$$

В этом случае, выбирая коэффициенты k_1, k_2 по способу наименьших квадратов, получаем совпадение аппроксимирующей функции с истинной для $x \geq 0$ как минимум в трех точках. Аппроксимация, применяемая в настоящей работе (13) для получения стационарных амплитудных зависимостей, позволяет получить точно такое же совпадение в трех точках. На рис. 4 показаны типичные зависимости вольт-амперных характеристик ($U > 0$), которые были получены экспериментально для германиевых (штриховая линия) и кремниевых (штрих-пунктирная линия) полупроводниковых диодов [6]. Сплошными линиями на этом рисунке построены аппроксимирующие зависимости типа (13). Из этих графиков видно, что ошибка в определении тока во всем диапазоне изменения напряжения для германиевых диодов составляет менее 5% от максимального значения тока при $U = 1,5 \varphi_0$ (φ_0 — контактная разность потенциалов [4]), а для кремниевых диодов менее 3% ($1 - u/1,5 \varphi_0$ [5, 4] и $2 - u/1,5 \varphi_0$ [2, 6]).

Таким образом, при исследовании стационарных процессов, происходящих в одночастотных параметрических генераторах, вольт-амперную характеристику полупроводниковых диодов с достаточной степенью точности можно аппроксимировать параболой одной степени с отсечкой (13).

Таким образом, в настоящей работе было показано, что стационарные амплитудные зависимости одночастотных параметрических генераторов с ломаной диссипативной характеристикой обладают призна-

ками амплитудных зависимостей систем, в которых потери изменяются плавно с ростом колебаний, и признаками амплитудных зависимостей систем, в которых потери изменяются резко.

В случае асинхронного режима колебаний в двухчастотных параметрических генераторах оказывается, что амплитуды гармоник тока, проходящего через нелинейный элемент в моменты его отпираания, выражаются через величину максимального значения напряжения на нелинейном элементе. При этом вид зависимости остается примерно таким же, как и в одночастотном параметрическом генераторе (4). В связи с этим, и поведение стационарных амплитуд генерации будет в основном таким же, как и в случае одночастотного параметрического генератора (см. рис. 2, 3).

При анализе режима синхронных колебаний, возникающего в двухчастотных параметрических генераторах [1], ввиду того, что время прохождения импульсов активного тока много меньше периодов колебаний в системе, можно использовать метод, предложенный в работе [7]. Однако в случае, когда характеристика нелинейного элемента аппроксимируется ломаной кривой, уже нельзя считать, что нелинейный элемент отпирается всего лишь один раз за период субгармонического колебания, так как ток проходит через нелинейный элемент в моменты времени, когда величина полного напряжения находится в интервале $[0, U_0]$. При этом оказывается, что при принятых предположениях и при амплитудах генерации порядка U_0 существование одного импульса за период субгармонического колебания будет иметь место лишь при малых значениях величины n (n — порядок автосинхронизации [1]). Следовательно, при больших n необходимо учитывать существование многих импульсов, что приводит к более быстро убывающей зависимости отношения полосы деления к полосе генерации от величины n , по сравнению с зависимостью $1/n$, которая характерна для резкой аппроксимации [3 и 7].

Таким образом колебательные системы, в которых характеристики нелинейных элементов аппроксимируются ломаной кривой, обладают свойствами как систем с резким изменением нелинейности, так и систем с плавным изменением нелинейности.

Автор благодарен К. К. Лихареву за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каплан А. Е., Кравцов Ю. А., Рылов В. А. Параметрические генераторы и делители частоты. М., 1966.
2. Лихарев К. К. «Радиотехника и электроника», 13, 1714, 1968.
3. Лагуткин А. Н. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астроном., 15, № 1, 1974.
4. Берман А. С. Нелинейная полупроводниковая емкость. М., 1963.
5. Бруевич А. Н., Евтянов С. И. Аппроксимация нелинейных характеристик и спектры при гармоническом воздействии. М., 1965.
6. Носов Ю. Р. Полупроводниковые импульсные диоды. М., 1965.
7. Лагуткин А. Н., Лихарев К. К. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астроном., 14, 565, 1973.

Поступила в редакцию
18.5.1972 г.

Кафедра
физики колебаний