УДК 533.9

Л. И. ПРИХОДЬКО

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ ЗНАЧЕНИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ В РЕГУЛЯРНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Вопрос об эффективной диэлектрической проницаемости в средах со случайными неоднородностями рассматривался в [1—4]. В [1, 2] было найдено значение $\varepsilon_{эфф}$ в слабонеоднородной изотропной среде, в [3, 4] построен тензор эффективной диэлектрической проницаемости слабонеоднородной магнитоактивной плазмы. Рассмотрение этого вопроса в упомянутых работах относилось к случаю, когда средние параметры среды (диэлектрическая проницаемость) постоянны. Существенно, что эффективная диэлектрическая проницаемость определялась из уравнений Максвелла как коэффициент, связывающий индукцию и напряженность электрического поля по формуле $\overline{D}_i = \overline{\varepsilon}_{ik}^{эфф}\, \overline{E}_k$. Такая запись учитывает не только изменение амплитуды и фазы среднего поля (скалярные эффекты), но и изменение поляризации среднего поля за счет рассеяния на хаотических неоднородностях.

Если среда обладает еще и регулярным градиентом диэлектрической проницаемости при наличии отражающего уровня (неоднородный ионосферный слой), то учет поляризационных изменений среднего поля становится математически очень сложным. Однако если масштаб хаотических неоднородностей велик по сравнению с длиной волны и мал по сравнению с толщиной регулярного слоя (в практических приложениях этот случай встречается довольно часто), то можно пренебречь изменением поляризации волны при рассеянии и ограничиться решением скалярной задачи. В этом случае эффективную диэлектрическую проницаемость можно ввести как коэффициент при среднем поле в скалярном уравнении Гельмгольца

$$\nabla^2 \overline{E} + k_0^2\, \overline{\varepsilon}_{эфф}\, \overline{E} = 0 \qquad \left(k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}\right). \tag{1}$$

Введенная таким образом $\overline{\varepsilon}_{эфф}$ будет комплексной скалярной величиной, учитывающей затухание среднего поля и изменение фазы за счет рассеяния.

Математическая сложность заставляет взять частный вид регулярного изменения диэлектрической проницаемости и рассматривать плоскую волну, падающую из свободного пространства на плоский полубесконечный слой, диэлектрическая проницаемость которого имеет вид

$$\varepsilon = \overline{\varepsilon}(z) + \mu(x,\ y,\ z), \tag{2}$$

где $\overline{\varepsilon}(z)$ — средняя диэлектрическая проницаемость, а $\mu(x,\ y,\ z)$ — флуктуационная часть, случайная функция координат, причем флуктуации предполагаются малыми, т. е. $\sqrt{\overline{\mu^2}} \ll 1$ и $\overline{\mu}=0$. Для гармонического процесса полное поле в среде должно удовлетворять уравнению Гельмгольца. Представив его в виде суммы среднего поля $\overline{E}$ и рассеянного поля ξ, можно получить систему уравнений для $\overline{E}$ и ξ. Решая эту систему методом последовательных приближений, выбрав в качестве малого параметра величину μ, получим для среднего поля и однократно рассеянного поля

$$\nabla^2 \overline{E} + k_0^2\, \overline{\varepsilon}\, \overline{E} = -\, k_0^2\, \overline{\mu\xi}, \qquad \nabla^2 \xi + k_0^2\, \overline{\varepsilon}\xi = -\, k_0^2\, \mu E_0, \tag{3}$$

где $\overline{E}_0$ — невозмущенное поле, т. е. поле при отсутствии флуктуаций μ. Представив $\overline{\mu\xi}$ в виде

$$\overline{\mu\xi} = \delta\varepsilon \cdot \overline{E}, \tag{4}$$

для среднего поля получим уравнение (1), где $\overline{\varepsilon}_{эфф} = \overline{\varepsilon}(z) + \delta\varepsilon$.

Рассмотрим неоднородный «линейный» слой $\overline{\varepsilon}(z) = 1 - \dfrac{z}{z_1}$. Пусть на границу его падает плоская волна $\exp(-ik_0 \sin\theta_0 x - ik_0 \cos\theta_0 z)$, θ_0 — угол падения. Тогда, решая систему (3) методом Фурье с граничными условиями непрерывности поля и его нормальной производной при $z=0$ и ограниченности поля при $z \to \infty$, получим для $\overline{\mu\xi}$ и среднего поля $\overline{E}$:

$$\overline{\mu\xi} = \frac{b^{4/3}}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \Big\{ [u(b^{2/3} t_1) - A_1(\varkappa)\, v(b^{2/3} t_1)] \times$$

$$\times \int\limits_{t_0}^{\infty} v(b^{2/3}\tilde{t}_1)\,[D]\,d\tilde{t}_1 + v(b^{2/3} t_1) \int\limits_{t_{01}}^{t_1} u(b^{2/3}\tilde{t}_1)\,[D]\,d\tilde{t}_1 -$$

$$- u(b^{2/3} t_1) \int\limits_{t_{01}}^{t_1} v(b^{2/3}\tilde{t}_1)\,[D]\,d\tilde{t}_1 \Big\}\, d\varkappa_1 d\varkappa_2, \tag{5}$$

$$\overline{E} = \Big\{ \overline{A_1} v(b^{2/3} t) + \overline{B_1} u(b^{2/3} t) + b^{4/3} v(b^{2/3} t) \int\limits_{t_0}^{t} u(b^{2/3}\tilde{t})\,\overline{\mu\xi}(z)\,d\tilde{t} -$$

$$- b^{4/3} u(b^{2/3} t) \int\limits_{t_0}^{t} v(b^{2/3}\tilde{t})\,\overline{\mu\xi}(z)\,d\tilde{t} \Big\}\, e^{-ik_0 \sin\theta_0\, x}. \tag{6}$$

Здесь $b = k_0 z_1$, u, v — функции Эйри, $t = \frac{z}{z_1} - \cos^2\theta_0$, $t_1 = \frac{z}{z_1} - \left(1 - \frac{\varkappa^2}{k_0^2}\right)$, $\varkappa^2 = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2$, $\overline{\mu\xi}(z) = \overline{\mu\xi} \cdot e^{ik_0 \sin\theta_0 x}$, $t_0 = t\,|_{z=0}$, $t_{01} = t_1\,|_{z=0}$, постоянные $A_1(\varkappa)$, $\overline{A_1}$, $\overline{B_1}$ определяются из граничных условий, через $[D]$ обозначен интеграл

$$[D] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{i\varkappa_1(\overline{x}-x) + i\varkappa_2(\overline{y}-y)}\, W E_0\, d\overline{x}\, d\overline{y},$$

где W — функция корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости μ. Будем считать далее, что $\overline{\varepsilon}_{эфф}$ также изменяется по линейному закону

$$\overline{\varepsilon}_{эфф} = a - \frac{z}{z_{эфф}}, \tag{7}$$

где $a = 1 + \delta\varepsilon(0)$, $\frac{1}{z_{эфф}} = \frac{1}{z_1} - \frac{d(\delta\varepsilon)}{dz}\Big|_{z=0}$, т. е. удержим только нулевой и первый члены в разложении $\delta\varepsilon$ в ряд по z.

Пусть статистические свойства рассматриваемой среды однородны по пространству и функция корреляции имеет вид

$$W = \overline{\mu^2} \exp\left[- \frac{(\overline{x} - x)^2 + (\overline{y} - y)^2}{l^2} \right],$$

где $\sqrt{\overline{\mu^2}}$ — стандарт флуктуаций μ, l — радиус корреляции неоднородностей. Тогда, опуская громоздкие вычисления, выпишем окончательные выражения для $\delta\varepsilon(0)$ и $\frac{d}{dz}(\delta\varepsilon)\,|_{z=0}$ для углов падения, удовлетворяющих условиям

$$\sin\theta_0 \gg \frac{2}{k_0 l}, \quad \cos\theta_0 \gg \frac{1}{(k_0 z_1)^{1/3}} \tag{8}$$

(условия (8) позволяют использовать углы падения θ_0 в интервале 10—50°).

$$\delta\varepsilon(0)=\frac{k_0 l\overline{\mu^2}}{4\sin\theta_0}\sqrt{\pi}\left[\frac{\sin 2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}{4\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{k_0^2 l^2}{4}\frac{\overline{\mu^2}}{\sqrt{\pi}}\operatorname{ctg}\theta_0\right)^2\cos^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}-\frac{i}{2}\right], \qquad (9)$$

$$\frac{d}{dz}(\delta\varepsilon)|_{z=0}=\frac{k_0^2 l\overline{\mu^2}}{4}\sqrt{\pi}\cdot\operatorname{ctg}\theta_0\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2}+\frac{2\sin^2 2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}{\left[4\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{k_0^2 l z_1\overline{\mu^2}}{4\sqrt{\pi}}\operatorname{ctg}\theta_0\right)^2\cos^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}\right\}, \qquad (10)$$

$$\varphi=\frac{2}{3}b\cdot\cos^3\theta_0.$$

Выражения (9) и (10) показывают, что среда из непоглощающей становится поглощающей, а область отражения среднего поля переходит в комплексную плоскость. Это приводит к тому, что в области $z>z_1\cos^2\theta_0$, где невозмущенное поле экспоненциально убывало, появляется «бегучесть» [5]. Наличие тригонометрических функций в $\overline{\varepsilon}_{эфф}$ связано с особенностями амплитудной и фазовой структуры стоячей волны невозмущенного поля.

Таким образом, задача вычисления среднего поля в регулярно-неоднородной среде с флуктуациями формально свелась к соответствующей задаче для регулярно-неоднородной поглощающей среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канер Э. А. «Изв. вузов», радиофизика, **2**, 827, 1959.
2. Басс Ф. Г. «Изв. вузов», радиофизика, **2**, 1015, 1959.
3. Бирюлин И. А. Реферат канд. диссертации. МГУ, 1966.
4. Рыжов Ю. А., Тамойкин В. В. «Изв. вузов», радиофизика, **13**, № 3, 1970.
5. Пермитин Г. В., Фрайман А. А. «Изв. вузов», радиофизика, **12**, № 12, 1969.

Поступила в редакцию
28.6 1973 г.

Кафедра
волновых процессов

УДК 621.373

Ю. М. АЗЬЯН, О. В. СНИГИРЕВ, В. К. КОРНЕВ

О СИНХРОНИЗАЦИИ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Используя известную модель автоколебательной системы с запаздыванием [1—3], режим установившегося синхронизма можно описать следующим нелинейным интегральным уравнением:

$$F[u(t)]=2N\int_{-\infty}^{t}\frac{J_{2N}(\omega_0 z)}{z}[u(t-z)+V(t-z)]\,dz, \qquad (1)$$