

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 3 — 1974

УДК 621.378.001

Ю. В. ГРИГОРЬЕВ, В. К. РУДЕНКО

К ТЕОРИИ ОДНОРЕЗОНАНСНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА СВЕТА

В рамках приближения стоячей волны проведено подробное исследование стационарных режимов работы однорезонансного ПГС с учетом потерь и расстройки от синхронизма. Исследована устойчивость найденных стационарных состояний по отношению к малым амплитудным и фазовым возмущениям произвольной формы.

В последнее время значительное внимание уделяется исследованиям однорезонансных параметрических генераторов света [1—5], в которых резонатор имеется только для одной из возбуждаемых волн. Отсутствие резонатора по другой волне делает невозможным генерацию в таком параметрическом генераторе (ПГС) нескольких групп мод, так называемых кластеров [6], свойственную двухрезонансным генераторам. В однорезонансном ПГС не возникает также обратная волна на частоте накачки, в результате чего становится возможным полное преобразование энергии волны накачки.

Анализ процесса в однорезонансном, как и в обычном ПГС [7], мы проводим на основе метода стоячей волны, предполагающего малые коэффициенты взаимодействия в параметрическом генераторе и, как следствие, пренебрежимо малые изменения вдоль резонатора прямой и отраженной волн с резонансной частотой. Указанный метод позволил проследить одновременное влияние на процессы в однорезонансном ПГС расстройки от синхронизма и различных потерь по резонансной и бегущим волнам.

Вывод основных уравнений

Рассмотрим одномерный резонатор типа Фабри—Перо, заполненный оптически прозрачной средой с квадратичной поляризуемостью. Пусть дисперсионные свойства среды позволяют эффективно взаимодействовать трем плоским волнам: накачки с частотой ω_H и с волновым числом k_H и параметрически возбужденным сигнальной и холостой волнам с частотами ω_{10} и ω_2 ($\omega_H = \omega_{10} + \omega_2$) и волновыми числами $k_{10} = \frac{\pi n}{l}$ и k^2 . Здесь n — номер продольной моды, возбуждающейся в резонаторе (предполагается, что зеркала отражают только на частоте сигнальной волны). Прямую и обратную волны на сигнальной частоте можно пред-

ставить стоячей волной с медленно меняющимися во времени амплитудой и фазой. Таким образом, поле в резонаторе имеет вид

$$E = E_1 \sin(\omega_{10}t + \varphi_1) \sin \frac{\pi n}{l} z + E_2 \cos(\omega_2 t - k_2 z + \varphi_2) + E_H \cos(\omega_H t - k_H z + \varphi_H), \quad (1)$$

где амплитуды E_2 и E_H и фазы φ_2 и φ_H являются медленно меняющимися функциями координаты и времени, а E_1 и φ_1 — только функциями времени.

Подставляя выражение (1) в уравнения Максвелла, методом медленно меняющихся амплитуд получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1} \frac{dE_1}{dt} + \sigma_1 \frac{1}{l} \int_0^l E_2 E_H \sin(\Phi - \Delta z) dz + \delta_1 E_1 &= 0, \\ \frac{1}{v_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{E_1} \frac{1}{l} \int_0^l E_2 E_H \cos(\Phi - \Delta z) dz &= 0, \\ \frac{1}{v_2} \frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{\sigma_2}{2} E_1 E_H \sin(\Phi - \Delta z) + \delta_2 E_2 &= 0, \\ \frac{1}{v_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\sigma_2}{2} \frac{E_1 E_H}{E_2} \cos(\Phi - \Delta z) &= 0, \\ \frac{1}{v_H} \frac{\partial E_H}{\partial t} + \frac{\partial E_H}{\partial z} - \frac{\sigma_H}{2} E_1 E_2 \sin(\Phi - \Delta z) + \delta_H E_H &= 0, \\ \frac{1}{v_H} \frac{\partial \varphi_H}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} + \frac{\sigma_H}{2} \frac{E_1 E_2}{E_H} \cos(\Phi - \Delta z) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_H$, $\Delta = k_1 + k_2 - k_H$ — расстройка волновых чисел от синхронизма, σ_1 , σ_2 и σ_H — коэффициенты связи, δ_1 , δ_2 и δ_H — параметры потерь на соответствующих частотах [8], v_1 , v_2 и v_H — групповые скорости соответствующих волн. Система уравнений (2) с определенными граничными условиями описывает процессы в нелинейном резонаторе.

Стационарные состояния

В стационарном режиме система уравнений (2) запишется так:

$$\sigma_1 E_{H0} \int_0^1 v w \sin \varphi dx + \delta_1 u = 0, \quad (3a)$$

$$\alpha + \frac{\sigma_1 E_{H0}}{u} \int_0^1 v w \cos \varphi dx = 0, \quad (3б)$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{\sigma_2 l E_{H0}}{2} u w \sin \varphi + \delta_2 l v = 0, \quad (3в)$$

¹ δ_1 включает в себя также и небольшие потери при отражении сигнальной волны от зеркал резонатора.

$$\frac{dw}{dx} - \frac{\sigma_H l E_{H0}}{2} uv \sin \varphi + \delta_H l w = 0, \quad (3\Gamma)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} + \Delta l + \frac{l E_{H0} u}{2} \left(\frac{\sigma_2 w}{v} - \frac{\sigma_H v}{w} \right) \cos \varphi = 0. \quad (3\Delta)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$x = \frac{z}{l} \quad \varphi = \Phi_{\text{стац}} - \Delta l x, \quad u = \frac{E_1}{E_{H0}}, \quad v = \frac{E_2}{E_{H0}}, \quad w = \frac{E_H}{E_{H0}},$$

$E_{H0} = E_H(0)$ — амплитуда волны накачки на входе резонатора, $\alpha = \frac{1}{v_1} \frac{d\varphi_{\text{стац}}}{dt}$ — величина, характеризующая сдвиг частоты параметрических колебаний от резонанса нелинейного резонатора. В общем случае

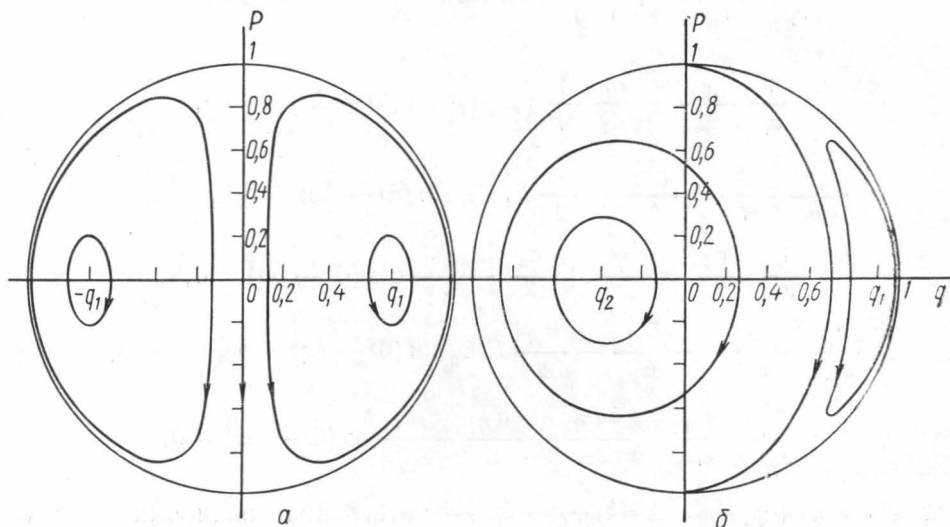


Рис. 1 Интегральные кривые уравнений (3в), (3г) и (3д);

$$a - \Delta = 0, \quad q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad b - \Delta > 0, \quad q_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\Delta l}{2x_0} \right)}$$

система уравнений (3) аналитически не разрешима. В случае равных затуханий бегущих волн ($\delta_2 = \delta_H = \delta$) из уравнений (3в и 3д) следует первый интеграл энергии:

$$\sigma_H v^2 = \sigma_2 (e^{-2\delta l x} - w^2). \quad (4)$$

При этом возможно качественное интегрирование уравнений (3в, г и д) на фазовой плоскости двух переменных

$$p = \sqrt{\frac{\sigma_H}{\sigma_2}} e^{\delta l x} v \sin \varphi \quad \text{и} \quad q = \sqrt{\frac{\sigma_H}{\sigma_2}} e^{\delta l x} v \cos \varphi.$$

Соответствующие интегральные кривые приведены на рис. 1 для случаев $\Delta = 0$ и $\Delta > 0$.

Все возможные движения в системе происходят внутри ограничивающей интегральной кривой — окружности единичного радиуса. При $\Delta = 0$ и нулевом значении амплитуд холостой волны на входе резонатора

($v_{x=0}=0$) движение на фазовой плоскости происходит из начала координат вдоль оси $q=0$ до ограничивающей окружности холостой, где амплитуда волны накачки становится равной нулю, а амплитуда волны — максимальной. В результате фаза волны накачки испытывает скачок. Это соответствует переходу системы по ограничивающей окружности из состояния с $\sin\varphi=-1$ в состояние с $\sin\varphi=+1$. Далее движение продолжается по оси $q=0$ к началу координат. Если при этом потери отсутствуют ($\delta=\delta_1=0$), то, достигнув начала координат, система приходит в первоначальное состояние. Таким образом совершается цикл полного преобразования энергии волны накачки в холостую волну и обратного преобразования последней в волну накачки. Амплитуды волн будут такими: $u = \frac{2\pi}{\sqrt{\sigma_2\sigma_H l E_{H0}}}$, $v = \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_H}} \sin \pi x$, $\omega = |\cos \pi x|$.

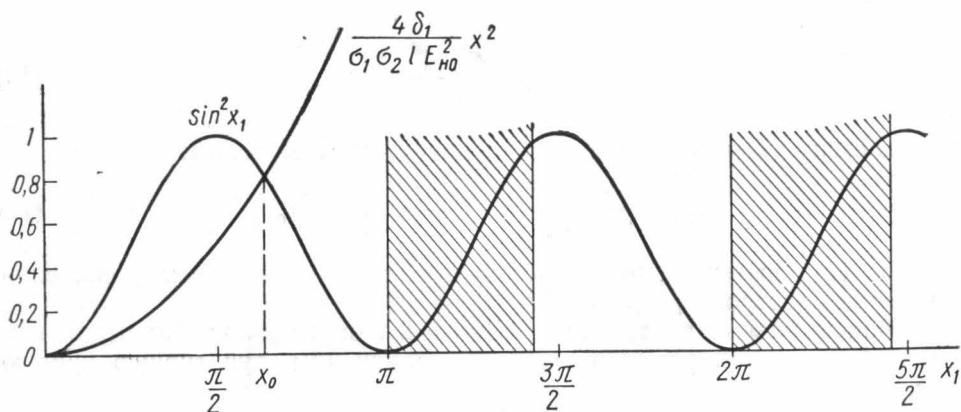


Рис. 2. Графики кривых $\sin^2 x_1$ и $\frac{4\delta_1}{\sigma_1\sigma_2 l E_{H0}^2} x^2$, определяющих рабочую точку x_0 параметрического генератора. Области неустойчивых состояний заштрихованы

В особых точках q_1 и q_2 амплитуда стоячей волны вырождается в нуль при $\delta_1 \neq 0$. В этом случае в системе могут существовать две пары стационарных волн $v_{ст}$ и $\omega_{ст}$. При $\delta=0$ система уравнений (3) разрешима также аналитически. Решение уравнения (3д) [9]:

$$\frac{\sigma_2\sigma_H}{4} uv\omega \cos \varphi = \Gamma_\Delta + \frac{\sigma_2\Delta}{4E_{H0}} \omega^2, \quad (5)$$

где постоянная интегрирования Γ_Δ определяется из граничных условий. В наиболее интересном случае, когда $v_{x=0}=0$, имеем

$$\sigma_H E_{H0} l uv\omega \cos \varphi = -\Delta l (1 - \omega^2). \quad (5')$$

Решая уравнение (3г) с учетом (4) и (5'), получим

$$\omega^2 = \frac{[(2x_1)^2 - (\Delta l)^2] (1 + \cos 2x_1) + 2(\Delta l)^2}{2(2x_1)^2}, \quad (6)$$

где

$$(2x_1)^2 = \sigma_2\sigma_H l^2 E_{H0}^2 u^2 + (\Delta l)^2. \quad (7)$$

Уравнение (3а и г) приводит к условию (рис. 2)

¹ При $\delta \neq 0$ введением переменных $R_1 = e^{\delta l x} v$ и $R_2 = e^{\delta l x} \omega$ уравнения с потерями сводятся к уравнениям без потерь.

$$\sin^2 x_1 = \frac{4\delta_1}{\sigma_1 \sigma_2 l E_{H0}^2} x_1^2. \quad (8)$$

Нетривиальный корень x_0 уравнения (8) существует при выполнении условия возбуждения параметрических колебаний:

$$\frac{4\delta_1}{\sigma_1 \sigma_2 l E_{H0}^2} < 1.$$

Таким образом, пороговое значение амплитуды волны накачки при $\Delta = 0$

$$E_{\text{пор}}^2 = \frac{4\delta_1}{\sigma_1 \sigma_2 l}. \quad (9)$$

Из соотношения (8) находим зависимость

$$\frac{E_{H0}^2}{E_{\text{пор}}^2} = \left(\frac{x_0}{\sin x_0} \right)^2. \quad (10)$$

Соотношение (7) позволяет найти амплитуду стоячей волны:

$$u^2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_H \delta_1 l} \left[1 - \left(\frac{\Delta l}{2x_0} \right)^2 \right] \sin^2 x_0. \quad (11)$$

Из (11) вытекает, что существует область допустимых значений волновых расстройк $|\Delta l|_{\text{max}} \leq 2x_0$.

Максимальные расстройки $|\Delta l|_{\text{max}} = 2x_0$ определяют границу области возбуждения параметрических колебаний (см. пунктирную кривую рис. 4):

$$\frac{E_{H0}^2}{E_{\text{пор}}^2} = \left(\frac{\frac{\Delta l_{\text{max}}}{2}}{\sin \frac{\Delta l_{\text{max}}}{2}} \right)^2. \quad (12)$$

Выражение (12) показывает, что с ростом волновой расстройки пороговое значение мощности волны накачки увеличивается.

Из (4) и (6) получаем зависимости амплитуд волны накачки и холостой волны от координаты x в пространстве между зеркалами нелинейного резонатора:

$$w^2 = \left(\frac{\Delta l}{2x_0} \right)^2 + \left[1 - \left(\frac{\Delta l}{2x_0} \right)^2 \right] \cos^2 x_0 x, \quad (13)$$

$$v^2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_H} \left[1 - \left(\frac{\Delta l}{2x_0} \right)^2 \right] \sin^2 x_0 x. \quad (14)$$

Полученные выражения дают возможность определить с помощью (5') фазовые соотношения в системе

$$\text{ctg } \varphi = \left(\frac{\Delta l}{2x_0} \right) \text{tg } x_0 x, \quad (15)$$

причем $\varphi < 0$. С учетом потерь на частотах бегущих волн ($\delta \neq 0$) стационарные решения имеют вид

$$w^2 = e^{-2\delta l x} \left\{ \left(\frac{\Delta l}{2x_0} \right)^2 + \left[1 - \left(\frac{\Delta l}{2x_0} \right)^2 \right] \cos^2 x_0 x \right\}, \quad (13')$$

$$v^2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_H} e^{-2\delta l} \left[1 - \left(\frac{\Delta l}{2x_0} \right)^2 \right] \sin^2 x_0, \quad (14')$$

$$u^2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_H \delta_1 l} \left[1 - \left(\frac{\Delta l}{2x_0} \right)^2 \right] \sin^2 x_0, \quad (15')$$

причем x_0 является теперь корнем уравнения

$$\frac{4\delta_1}{\sigma_1 \sigma_2 l E_{H0}^2} x_1 [(2\delta l)^2 + (2x_1)^2] = 2x_1 - e^{-2\delta l} (2\delta l \sin 2x_1 + 2x_1 \cos 2x_1).$$

Коэффициент преобразования энергии волны накачки на длине резонатора

$$\eta_l = 1 - \omega_l^2 = 1 - e^{-2\delta l} \left\{ \left(\frac{\Delta l}{2x_0} \right)^2 + \left[1 - \left(\frac{\Delta l}{2x_0} \right)^2 \right] \cos^2 x_0 \right\}. \quad (16)$$

При $E_{H0 \text{ опт}}^2 = \frac{2\delta_1}{\sigma_1 \sigma_2 l} \frac{\pi^2 + (2\delta l)^2}{1 + e^{-2\delta l}}$ происходит максимальное преобразование (полное — при отсутствии волновой расстройки) энергии волны накачки в параметрические волны.

Интегрируя далее уравнение (3б), находим сдвиг частоты параметрических колебаний от резонанса нелинейного резонатора:

$$\alpha l = \frac{\Delta l \delta_1 l}{1 - \cos 2x_0} \left(1 - \frac{\sin 2x_0}{2x_0} \right). \quad (17)$$

Устойчивость движений в системе

Устойчивость движений в системе по отношению к бесконечно малым возмущениям исследуется тем же методом, что и в работе [7].

Для малых нестационарных возмущений, накладываемых на стационарное движение, была получена система линейных дифференциальных уравнений с независимыми от времени коэффициентами. В случае близких групповых скоростей взаимодействующих волн ($v_1 \approx v_2 \approx v_H$) это позволило представить изменение малых возмущений во времени

множителем $e^{\frac{v_1}{l} \epsilon t}$. Решение полученной системы уравнений с определенными граничными условиями (так называемое уравнение устойчивости) определяет комплексные «частоты» возмущений ϵ . В случае положительной действительной части малые возмущения будут неограниченно возрастать со временем, т. е. движение будет неустойчивым.

1. Случай отсутствия волновой расстройки ($\Delta=0$).

Если потери на частотах бегущих волн отсутствуют ($\delta=0$), уравнение устойчивости удовлетворяется, в частности, при $\epsilon = \pm i2x_0$. Уравнение имеет также положительный корень ($\epsilon > 0$) при $x_0 \sin 2x_0 > 1 - \cos 2x_0$. Области абсолютной неустойчивости, определяемые этим условием, показаны на рис. 2 (заштрихованные части). Одна из границ каждой области неустойчивых стационарных состояний определяется точкой касания кривых $\sin^2 x_1$ и $\frac{4\delta_1}{\sigma_1 \sigma_2 l E_{H0}^2} x_1^2$. Каждая такая точка дает на-

чало определенной зоне жесткого возбуждения параметрических колебаний. Например, при ~ 21 -кратном превышении над порогом (точка $x_0 \approx 4,5$) возникает первая зона жесткого возбуждения параметрических колебаний. Увеличивая энергию волны накачки или уменьшая затухание $\delta_1 l$ (т. е. «опуская» кривую $\frac{4\delta_1}{\sigma_1 \sigma_2 l E_{H0}^2} x_1^2$), последовательно «про-

ходим» сначала зону мягкого возбуждения ($0 < x_0 < \pi$), затем первую ($\pi < x_0 < 2\pi$), вторую ($2\pi < x_0 < 3\pi$) и т. д. зоны жесткого возбуждения параметрических колебаний. На рис. 3 для различных зон приведены зависимости квадратов амплитуд на выходе параметрического генератора от квадрата входной амплитуды волны накачки. Неустойчивые ветви проведены пунктиром. В устойчивых областях (незаштрихованы на рис. 2), как показывает анализ уравнения устойчивости на комплексной плоскости $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, нет комплексных корней с положительной действительной частью.

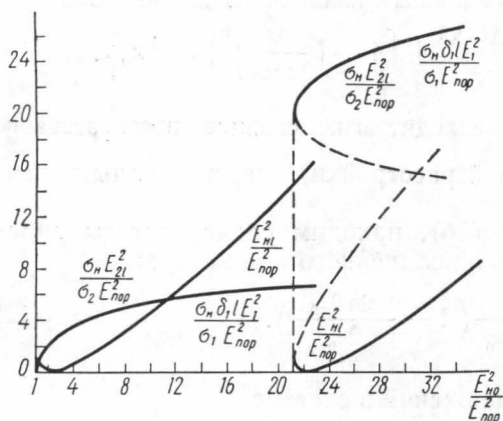


Рис. 3. Зависимости квадратов амплитуд на выходе параметрического генератора от квадрата входной амплитуды волны накачки. Неустойчивые ветви проведены пунктиром

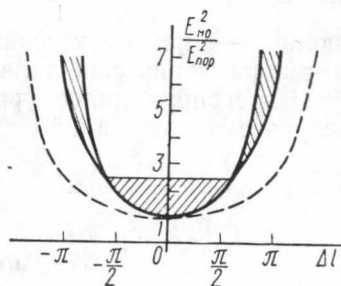


Рис. 4. Чашеобразная область устойчивых стационарных колебаний (заштрихована) и «рожковые» неустойчивые области (заштрихованы) внутри области возбуждения параметрических волн (пунктирная линия)

2. $\Delta \neq 0$.

Из анализа уравнения устойчивости вытекает, что внутри области возбуждения параметрических колебаний (пунктирная кривая на рис. 4) существуют небольшие области устойчивых стационарных колебаний (заштрихованы на рис. 4). При исследовании же уравнения на комплексной плоскости ε выяснилось, что устойчивые стационарные параметрические колебания в однорезонансном параметрическом генераторе при наличии волновой расстройки возможны только в чашеобразной области, ограниченной кривой, определяемой из уравнения

$$1 - \left(\frac{\Delta l}{2x_0}\right) - \left(\frac{\Delta l}{2x_0}\right)^2 = 0. \text{ Важно отметить, что верхняя граница}$$

этой области ($E_{H0}^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 E_{np}^2$) соответствует оптимальному случаю максимальной перекачки энергии волны накачки в параметрические колебания. При дальнейшем увеличении энергии волны накачки (т. е. при $x_0 > \frac{\pi}{2}$) параметрические колебания становятся неустойчивыми.

Из приведенного выше анализа устойчивости при $\Delta = 0$ не следует, как в случае $\Delta \neq 0$, вывод о неустойчивости стационарных решений при превышении накачкой оптимальной величины. Однако исследование устойчивости стационарных решений при различных групповых скоростях взаимодействующих волн показывает, что наличие расстройки по

групповым скоростям приводит в случае $\Delta=0$ к неустойчивости стационарного режима при величинах накачки, превышающих оптимальное значение.

Учет малого затухания на частотах бегущих волн ($\delta \neq 0$) не приводит к сдвигу мнимого корня $\epsilon_2 = 2x_0$. Сохранение этого корня означает, что малые возмущения амплитуд и фаз являются периодическими функциями времени с частотой $\omega_0 = \frac{v_1}{l} 2x_0$. Накладываясь на стационарные значения амплитуд и фаз, они приводят к периодическим изменениям (флуктуациям) последних. Таким образом, стационарные амплитуды и частоты параметрического генератора «плавают» в некоторых пределах. Состояние системы, в частности, ее температурный режим, может сильно влиять на величину средних амплитуд флуктуаций. Статистический характер флуктуаций стационарных амплитуд и частот одномодового параметрического генератора является его принципиальной особенностью. Отметим также, что в случае максимальной перекачки энергии волны накачки в параметрические колебания ($x_0 = \frac{\pi}{2}$) частота флуктуаций становится равной частоте биений двух мод резонатора. Поскольку это происходит на границе области устойчивости одномодового режима, можно считать, что здесь зарождается вторая мода. Наличие мнимого корня системы является характеристикой рассматриваемого ПГС, образованного плоскими зеркалами. Указанный корень при переходе к другим типам зеркал становится, по-видимому, комплексным с положительной или отрицательной действительной частью в зависимости от типов зеркал.

В заключение отметим, что при больших коэффициентах взаимодействия ($\sqrt{\sigma_2 \sigma_H} l E_{H0} > 1$) амплитуды волн в однорезонансном ПГС становятся сравнимыми. В этом случае, как и для обычного ПГС [10, 11], приходится рассматривать [5] уравнения, описывающие изменения вдоль резонатора амплитуд и фаз всех взаимодействующих в параметрическом генераторе волн.

Авторы приносят глубокую благодарность Р. В. Хохлову за постоянное внимание к работе и В. М. Фортусу за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bjorkholm J. E. Appl. Phys. Lett., **13**, 399, 1968.
2. Kreuzer L. B. Proceedings of the Conference on Lasers and Opto-Electronics. London, 1969.
3. Falk J., Murgau J. E. Appl. Phys. Lett., **14**, 245, 1969.
4. Беляев Ю. Н., Киселев А. М., Фрейдман Г. И. Письма в ЖЭТФ, **9**, 441, 1969.
5. Фортус В. М., Фрейдман Г. И. «Изв. вузов», радиофизика, **12**, 850, 1969.
6. Giordmaine J. A., Miller R. C. Physics of Quantum Electronic. N. Y., 1966.
7. Григорьев Ю. В., Руденко В. К., Хохлов Р. В. «Изв. вузов», радиофизика, **9**, 932, 1966.
8. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М., 1964.
9. Бломберген Н. Нелинейная оптика, М., 1966.
10. Григорьев Ю. В. Аннотация докладов на III Всесоюзном симпозиуме по нелинейной оптике. Ереван, 1967, стр. 71.
11. Сущик М. М., Фортус В. М., Фрейдман Г. И. «Изв. вузов», радиофизика, **13**, 631, 1970.

Поступила в редакцию
7.4 1972 г.

Кафедра
волновых процессов