Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1974

УДК 530.12 : 531.5

В. Е. РАДЧЕНКО

# О КВАНТОВОМ ВЫВОДЕ КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Из квантовой теории получен гравитационный потенциал взаимодействия векторных частиц с ненулевой массой покоя. Найдены уравнения движения для спина векторной частицы и центра масс невращающейся частицы, движущейся в поле другой.

Помимо трех классических гравитационных экспериментов существует возможность четвертой проверки теории с помощью вращательных эффектов в гравитационном поле.

Гравитационный потенциал взаимодействия двух вращающихся частиц может быть найден как методами классической, так и методами квантовой механики. Настоящая статья посвящена второму способу. Задача получения потенциала взаимодействия методами квантовой механики не новая. В 1929 г. Брейт [1] получил из квантовой теории электрический потенциал взаимодействия электронов. Для случая гравитации аналогичный метод впервые применил Кориналдези [2]. Он получил гравитационный потенциал для скалярных частиц и вывел квантовые уравнения для движения центра масс скалярной частицы в поле другой. Далее группа авторов [3] получила гравитационные потенциалы для нейтральных и заряженных частиц спина 0, 1/2 и 1 (фотоны). В стороне остался случай частиц спина 1 с ненулевой массой покоя.

Полученный гравитационный потенциал для частиц спина 1/2 из работы [3] был применен в [4] для изучения прецессии гироскопа. Как известно, работать со спинорными частицами гораздо труднее, чем с векторными. Поэтому возникает вопрос, нельзя ли для аналогичных целей использовать гравитационный потенциал векторных частиц с ненулевой массой покоя? Выяснению этого обстоятельства посвящена данная работа.

## § 1. Гравитационный потенциал векторных частиц

Рассмотрим одногравитонный обмен между двумя векторными частицами. Будем считать частицы различными и обладающими ненулевыми массами покоя $m_1$ и $m_2$. В этом случае не будет обменных диаграмм типа Фейнмана и следует учитывать только одну.

Плотность лагранжиана векторного поля в искривленном пространстве имеет вид

$$\mathscr{L} = \sqrt{-g}\{-g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} (\nabla_\mu \psi_\rho^*) (\nabla_\nu \psi_\sigma) + m^2 g^{\mu\nu} \psi_\mu^* \psi_\nu\}, \qquad (1)$$

где $g^{\mu\nu}$ — метрический тензор; $\nabla_\mu$ — ковариантная производная; $g$ — детерминант метрического тензора; $\psi_\rho$ — комплексный 4-потенциал векторного поля.

Следуя Гупта [5, 6], разложим гравитационные величины в ряд по гравитационной константе $\varkappa$ ($\varkappa^2 = 16\pi G$ [1], $G$ — постоянная Ньютона), исходя из формулы

$$\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu} - \varkappa y^{\mu\nu}, \qquad (2)$$

где $\varepsilon^{\mu\nu}$ — тензор Минковского.

Вместо $y^{\mu\nu}$ удобно ввести

$$h^{\mu\nu} = y^{\mu\nu} - \frac{1}{2} y \varepsilon^{\mu\nu}, \quad y = y^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu}. \qquad (3)$$

Тогда плотность лагранжиана (1) в первом порядке по $\varkappa$

$$L' = \frac{1}{2} \varkappa (h^{\gamma}_{\sigma,\nu} + h^{\gamma}_{\nu,\sigma} - h^{,\gamma}_{\sigma\nu}) (\psi^{*\sigma,\nu} \psi_\gamma + \psi_\gamma^* \psi^{\sigma,\nu}) +$$

$$+ \varkappa h^{\mu\nu} (\psi^*_{\rho,\mu} \psi^{\rho}_{,\nu} + \psi^*_{\mu,\gamma} \psi^{,\gamma}_{\nu} - m^2 \psi_\mu^* \psi_\nu) + \qquad (4)$$

$$+ \frac{1}{2} \varkappa h (m^2 \psi_\mu^* \psi^\mu - \psi^*_{\rho,\mu} \psi^{\rho,\mu}),$$

где $\psi^{,\gamma}_{\nu} = \psi_{\nu,\mu} \varepsilon^{\mu\gamma}$.

Для хронологических спариваний гравитационных операторов имеем

$$\langle 0 | T\, (h_{\mu\nu}(x)\, h_{\alpha\beta}(y) | 0 \rangle = i\, (\varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\mu\alpha} \varepsilon_{\nu\beta} - \varepsilon_{\mu\beta} \varepsilon_{\nu\alpha}) D_0^c (x - y), \qquad (5)$$

где

$$D_0^c(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \frac{e^{ikx}}{k^2 + i\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

$S$-матрица второго порядка имеет вид

$$S_2 = i^2 \iint dx dy\, T\{\mathscr{L}^{(1)}_{\text{вз}}(x) \mathscr{L}^{(2)}_{\text{вз}}(y)\}. \qquad (6)$$

Матричный элемент одногравитонного обмена двух векторных частиц находим в виде

$$F = \frac{i\varkappa^2 (2\pi)^4}{4 (p_0 q_0 p_0' q_0')^{1/2}} \frac{\delta(p + q - p' - q')}{(p - p')^2} \Big\{ [^{\cdot\cdot\mu\rho}_{\mu\rho\cdot\cdot}] [(p'p)(q'q) - (p'q')(pq) -$$

$$- (p'q)(pq') - m_1^2 (q'q) - m_2^2 (p'p) + 2 m_1^2 m_2^2] + [^{\cdot\cdot\gamma\cdot}_{\gamma\nu\cdot\sigma}] \Big[ \frac{1}{2} (p'q' +$$

$$+ pq + p'q + pq')(p^\sigma p'^\nu - p^\nu p'^\sigma) - m_1^2 q^\nu q'^\sigma] + [^{\sigma\rho\nu\cdot}_{\cdot\cdot\cdot\rho}] \Big[ \frac{1}{2} (p'q' +$$

$$+ pq + p'q + pq')(q'_\sigma q_\nu - q'_\nu q_\sigma) - m_2^2 p_\sigma p'_\nu] + \frac{1}{4} (p'q' + pq + p'q +$$

$$+ pq')(p - p')_\nu (p - p')_\sigma \Big\{ [^{\cdot\gamma\nu\sigma}_{\gamma\cdot\cdot\cdot}] - [^{\nu\gamma\cdot\sigma}_{\cdot\cdot\gamma\cdot}] - [^{\gamma\sigma\nu\cdot}_{\cdot\cdot\cdot\gamma}] +$$

---

[1] Здесь выбраны единицы: $c = \hbar = 1$.

$$+\left[{}^{\nu\sigma\gamma\cdot}_{\cdots\gamma}\right]\Big\}+\frac{1}{4}(p-p')_\sigma(p-p')_{\sigma'}\left[(p+p')^{\gamma'}(q+q')^{\gamma}-(p+p')^{\gamma}(q+\right.$$

$$\left.+q')^{\gamma'}\right]\left\{\left[{}^{\sigma\sigma'\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\gamma\gamma'}\right]+\left[{}^{\cdot\cdot\sigma'\sigma\sigma'}_{\gamma\gamma'\cdot\cdot}\right]+\left[{}^{\sigma\cdot\cdot\sigma'}_{\cdot\gamma\gamma'\cdot}\right]+\left[{}^{\cdot,\sigma\sigma'\cdot}_{\gamma'\cdot\cdot\gamma}\right]\right\}\Big\}, \tag{7}$$

где $p'p=p_0'p_0-\vec{p}'\vec{p}$; $p$, $p'$ и $q$, $q'$ — начальные и конечные 4-импульсы частиц с массами $m_1$ и $m_2$; $\left[{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\mu\nu\cdot\cdot}\right]=(\overset{*}{e}_k)_\mu(\overset{*}{e}{}_k')_\nu(e_H)^\alpha\ (e_H')^\beta$; $e_H$, $e_H'$ — начальные векторы поляризации частиц с массами $m_1$ и $m_2$; $e_k$, $e_k'$ — конечные векторы поляризации частиц с массам $m_1$ и $m_2$.

Для вычисления гравитационного потенциала необходимо перейти в (7) к нерелятивистскому пределу и ограничиться членами порядка $\sim\frac{1}{c^2}$ (см. [7], стр. 446—455). Тогда (7) можно будет представить в виде

$$F\sim\overset{*}{e}_k\overset{*}{e}{}_k'V(\mathbf{k};\ \mathbf{p},\ \mathbf{q};\ \mathbf{S}_1,\ \mathbf{S}_2)e_He_H', \tag{8}$$

где $V$ — гравитационный потенциал взаимодействия, $\mathbf{k}=\mathbf{p}-\mathbf{p}'$, $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ — операторы спинов частиц. Операторы спинов можно явно ввести в (7) с помощью соотношений

$$\langle\mathbf{e}_k|(\mathbf{aS})(\mathbf{bS})|\mathbf{e}_H\rangle=(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_H)(\mathbf{ab})-(\mathbf{e}_k\,\mathbf{b})(\mathbf{ae}_H),$$

$$\langle\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k'|\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2|\mathbf{e}_H\,\mathbf{e}_H'\rangle=(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_H')(\mathbf{e}_k'\mathbf{e}_H)-\ (\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k'^{*})(\mathbf{e}_H^{*}\,\mathbf{e}_H'), \tag{9}$$

где $(\mathbf{ab})=\overset{*}{a}_xb_x+\overset{*}{a}_yb_y+\overset{*}{a}_zb_z$.

Переходя к координатному представлению

$$V(\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int V(k)\,e^{-i\mathbf{kr}}\,d\mathbf{k}, \tag{10}$$

где $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$, получим

$$V(\mathbf{p},\ \mathbf{q},\ \mathbf{r})=-\frac{Gm_1m_2}{r}\left[1+\frac{1}{m_1m_2c^2}\left(-4\mathbf{pq}+\frac{3}{2}\frac{m_2}{m_1}\mathbf{p}^2+\frac{3}{2}\frac{m_1}{m_2}\mathbf{q}^2\right)\right]+$$
$$+\frac{\pi G\hbar^2}{c^2}\left(3+2\frac{m_1}{m_2}+2\frac{m_2}{m_1}\right)\delta(\mathbf{r})+\frac{G}{c^2r^3}\left[3\frac{(\mathbf{S}_1\mathbf{r})(\mathbf{S}_2\mathbf{r})}{r^2}-\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2\right]+$$
$$+\frac{2}{3}\frac{\pi G}{c^2}\left(4\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2-\frac{m_1}{m_2}\mathbf{S}_2^2-\frac{m_2}{m_1}\mathbf{S}_1^2\right)\delta(\mathbf{r})+\frac{G}{c^2r^3}\Big\{2\mathbf{S}_2\cdot[\mathbf{r}\times\mathbf{p}]-$$
$$-\frac{3}{2}\frac{m_1}{m_2}\mathbf{S}_2[\mathbf{r}\times\mathbf{q}]\Big\}+\frac{G}{c^2r^3}\Big\{-2\mathbf{S}_1[\mathbf{r}\times\mathbf{q}]+\frac{3}{2}\frac{m_2}{m_1}\mathbf{S}_1[\mathbf{r}\times\mathbf{p}]\Big\}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{m_1}{m_2}\frac{G}{c^2r^3}\left[3\frac{(\mathbf{S}_2\mathbf{r})^2}{r^2}-\mathbf{S}_2^2\right]+\frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1}\frac{G}{c^2r^3}\left[3\frac{(\mathbf{S}_1\mathbf{r})^2}{r^2}-\mathbf{S}_1^2\right]-$$
$$-\frac{G}{2c^2r}\left[\mathbf{pq}-\frac{1}{r^2}\mathbf{r}(\mathbf{rp})\,\mathbf{q}\right]. \tag{11}$$

Сравним этот потенциал с потенциалом из работы [3] для частиц спина 1/2. Во-первых, отличными являются контактные члены, правда, это несущественно при переходе к классике. Во-вторых, различие заключается в трех последних слагаемых. Два первых из них для спинорных частиц тождественно равны нулю, но это различие несущественно при решении реальных астрономических задач вследствие их малости. Основное отличие содержится в последнем члене. Он появился из-за учета запаздывания гравитационного взаимодействия. Аналогичный член должен появиться во всех потенциалах [3] при условии, если бы авторы учитывали запаздывание. Учет же запаздывания необходим, он дает вклад $\sim 1/c_2$. Аналогичный член есть, например, в соответствующем выражении в книге Фока [8], (81.01).

## § 2. Уравнение движения спина

Получим из квантовой теории уравнение движения спина вращающейся частицы в поле другой вращающейся частицы. Это уравнение выводится для среднего значения операторов

$$\int \psi^* (\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2) \dot{A} \psi (\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)\, d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = i \int \psi^* (\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2) [H,\ A]\, \psi (\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)\, d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \tag{12}$$

где А — рассматриваемый динамический оператор (точка означает дифференцирование по времени), $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ — волновая функция системы, $H$ — гамильтониан системы:

$$H = K + \Delta K + V; \tag{13}$$

$K$ — оператор кинетической энергии:

$$K = \frac{1}{2m_1}\,\mathbf{p}^2 + \frac{1}{2m_2}\,\mathbf{q}^2,$$

$\Delta K$ — релятивистская поправка к кинетической энергии:

$$\Delta K = -\frac{1}{8m_1^3 c^2}\,(\mathbf{p}^2)^2 - \frac{1}{8m_2^3\,c^2}\,(\mathbf{q}^2)^2,$$

$\mathbf{V}$ — потенциальная энергия, даваемая формулой (11). Предположим, что волновые функции описывают непересекающиеся волновые пакеты, соответствующие частицам. Тогда в потенциале (11) можно опустить контактные члены.

Для упрощения записи не будем явно записывать среднее значение операторов. Тогда имеем следующее уравнение для спина:

$$\dot{\mathbf{S}} = i[V, \mathbf{S}]. \tag{14}$$

Используя перестановочные соотношения

$$\begin{gathered}[a\mathbf{S},\ \mathbf{S}] = -i\,[\mathbf{a} \times \mathbf{S}],\\ [(\mathbf{aS})(\mathbf{bS}),\ \mathbf{S}] = -i\,\{(\mathbf{aS})\,[\mathbf{b} \times \mathbf{S}] + [\mathbf{a} \times \mathbf{S}]\,(\mathbf{bS})\},\end{gathered} \tag{15}$$

получаем квантовое уравнение

$$\dot{\mathbf{S}}_1 = [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{S}_1] + \frac{3}{2}\,\frac{m_2}{m_1}\,\frac{G}{c^2 r^5}\,(\mathbf{rS}_1)\,[\mathbf{r} \times \mathbf{S}_1] + [\mathbf{r} \times \mathbf{S}_1]\,(\mathbf{rS}_1)], \tag{16}$$

где $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_{\text{D.C.}} + \mathbf{\Omega}_{\text{Л.Т.}}$; член Де Ситтера: $\mathbf{\Omega}_{\text{D. C.}} = \frac{G}{c^2 r^3}\Big\{-2\,[\mathbf{r} \times \mathbf{q}] + {}$ ${}+ \frac{3}{2}\,\frac{m_2}{m_1}\,[\mathbf{r} \times \mathbf{p}]\Big\}$, член Лензе — Тирринга: $\mathbf{\Omega}_{\text{Л.Т.}} = \frac{G}{c^2 r^3}\left[3\,\frac{(\mathbf{S}_2\mathbf{r})\,r}{r^2} - \mathbf{S}_2\right]$.

Переходя к классической механике, получаем уравнение для внутреннего углового момента частицы

$$\dot{\mathbf{S}}_1 = [\Omega \times \mathbf{S}_1] + 3\,\frac{m_2}{m_1}\,\frac{G}{c^2 r^5}\,(r\mathbf{S}_1)\,[\mathbf{r} \times \mathbf{S}_1]. \tag{17}$$

Если пренебречь вторым членом справа, что всегда оправдано для реальных астрономических задач, то получаем результат, согласующийся с [4].

## § 3. Уравнение движения центра масс невращающейся частицы

Получим уравнение движения для центра масс невращающейся частицы в поле другой невращающейся частицы. Для этого положим в потенциале (11) $\mathbf{S}_1=\mathbf{S}_2=0$ и рассмотрим уравнение

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = i^2 [H, [H, \mathbf{r}_1]], \tag{18}$$

где $H$ дается (13).

Заметим, что для полного вывода уравнений движения надо учитывать самодействие гравитационного поля. Это даст в уравнениях движения члены $\sim G^2$, но они по-прежнему будут иметь порядок $\sim 1/c^2$. Таких членов нет в потенциале (11), что и понятно, так как он получен из учета одногравитонного обмена. Если учесть радиационные поправки к диаграмме одногравитонного обмена, то учет диаграммы четвертого порядка дает вклад в потенциал [9].

$$\frac{G^2}{2c^2r^2}(m_1+m_2).$$

Таким образом, этот член необходимо добавить к потенциалу (11). Теперь можно вычислять (18). Учет запаздывания гравитационного взаимодействия дает

$$\frac{1}{2}\frac{G}{m_2}q^s(r)_{,ins}q^n + \frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}\right)_{,in}\left[\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}\right]\frac{\partial}{\partial r_2^n}, \tag{19}$$

где

$$(r)_{,ins} = \frac{\partial^3}{\partial r_1^i\,\partial r_1^n\,\partial r_1^s}|\vec{r}_1-\vec{r}_2|.$$

Все операторы действуют на все величины правее себя. С учетом радиационных поправок получаем член $\sim G^2$:

$$-G^2\left(\frac{m_2}{r}\right)_{,i}\left(\frac{4m_2}{r}+\frac{5m_1}{r}\right). \tag{20}$$

Вводя обозначения

$$\frac{p^i}{m_1}=v_1^i,\quad \frac{q^i}{m_2}=v_2^i,\quad \varphi=\frac{Gm_2}{r},\quad \varphi_{,i}=\frac{\partial}{\partial r_1^i}\varphi,$$

получаем окончательное выражение для квантового уравнения движения центра масс частицы:

$$\ddot{r}_1^i = \varphi_{,i} + v_1^s\varphi_{,i}v_1^s - 2[v_1^s\varphi_{,s}v_1^i + v_1^i\varphi_{,s}v_1^s] + \frac{3}{2}v_2^s\varphi_{,i}v_2^s -$$
$$-2[v_1^s\varphi_{,i}v_2^s + v_2^s\varphi_{,i}v_1^s] + 2[v_1^s\varphi_{,s}v_2^i + v_2^i\varphi_{,s}v_1^s] + \frac{3}{2}[v_1^i\varphi_{,s}v_2^s +$$
$$+ v_2^s\varphi_{,s}v_1^i] - 2[v_2^s\varphi_{,s}v_2^i + v_2^i\varphi_{,s}v_2^s] + \frac{1}{2}v_2^n r_{,ins}v_2^s -$$
$$-G\varphi_{,i}\left(\frac{4m_2}{r}+\frac{5m_1}{r}\right). \tag{21}$$

Выражение (21) согласуется с результатом работы [2], если перегруппировать некоторые члены. Если от выражения (21) перейти к классической механике, то получим уравнение движения, совпадающее с результатом Инфельда [10].

Автор выражает благодарность Ю. С. Владимирову и Д. Д. Иваненко за многочисленные дискуссии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Breit G. Phys. Rev., **34**, 553, 1929.
2. Corinaldesi E. Proc. Phys. Soc., **69A**, 189, 1956.
3. Bruce M., Barker B. M., Gupta S. N., Haracz R. Phys. Rev., **149**, 1027, 1966.
4. Barker B. M., O'Connel R. F. Phys. Rev., **D2**, 1428, 1971.
5. Gupta S. N. Proc. Phys. Soc., **A65**, 161, 1952.
6. Gupta S. N. Proc. Phys. Soc., **A65**, 608, 1952.
7. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., 1969.
8. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961.
9. Iwasaki Y. Lett. Nuov. Cim., **1**, 783, 1971.
10. Infeld L. Rev. Mod. Phys., **29**, 398, 1957.

Поступила в редакцию
24.5 1972 г.

Кафедра
теоретической физики