

Г. В. БУШУЕВА, Р. Д. ХОМЯКОВА, А. А. ПРЕДВОДИТЕЛЕВ

**ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ КРУГОВОЙ ДИСЛОКАЦИОННОЙ  
ПЕТЛИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ВЕКТОРОМ БЮРГЕРСА**

Получены выражения для скальвающих компонентов поля упругих напряжений круговой дислокационной петли с произвольным вектором Бюргера в форме полных эллиптических интегралов первого и второго рода, удобной для численных расчетов.

Известно, что дислокационные петли, образующиеся в результате закалки [1—3] и облучения [4, 5], вызывают значительное упрочнение кристаллов, представляя собой эффективные препятствия движению дислокаций. Необходимым этапом, предшествующим рассмотрению взаимодействия дислокаций с ансамблем дислокационных петель, является детальный анализ поля напряжения последних. Нахождение поля напряжений дислокационных петель произвольной формы представляет значительные трудности. Поэтому обычно считают, что петли имеют форму круга. Соответствующие выражения для компонентов тензора напряжений круговой дислокационной петли получены лишь в частных случаях, когда ее вектор Бюргера расположен либо в плоскости залегания петли (скользящая петля) [6—8]<sup>1</sup>, либо ортогонален этой плоскости (призматическая петля) [10, 11]. К тому же в [10, 11] компоненты тензора напряжений призматической петли выражены в интегральной форме, что неудобно для практических расчетов. Однако в целом ряде случаев, например в ГПУ кристаллах, вектор Бюргера петля  $1/6 \langle 2\bar{2}03 \rangle$  составляет острый угол с плоскостью ее залегания. Это вынуждает рассмотреть поле напряжений дислокационных колец с произвольным вектором Бюргера. При этом, поскольку постановка настоящего вопроса диктуется задачей анализа прохождения дислокаций через ансамбль дислокационных петель, формулы для компонентов тензора напряжений должны быть записаны в произвольной системе координат и в форме, удобной для численных расчетов.

<sup>1</sup> В работах [6—8] допущены некоторые ошибки. Ошибки в работе [6] исправлены частично в [9] и [8]. Однако в [8], в свою очередь, содержатся неточности. В выражении для коэффициента  $B$  формулы (6) знак следует изменить на обратный. В работе [7] в § 4.2 перед членом  $\cos^2 \beta \frac{cI_0}{dr}$  в выражении для  $\frac{\partial I_1}{\partial x}$  следует писать знак минус. Последнее слагаемое  $\frac{[2 - \nu(1 - \cos 2\beta)]}{r -}$   $E$  в квадратных скобках формулы для определения  $\sigma_{13}^{D1}$  также должно иметь знак минус.

## § 1. Общий случай

Рассмотрим круговую дислокационную петлю радиуса  $a$ , расположенную в плоскости  $z=0$  с центром в начале координат и с произвольным вектором Бюргера  $\bar{b} = (b \sin \gamma \cos \theta, b \sin \gamma \sin \theta, b \cos \gamma)$ , где  $\gamma$  — угол между вектором Бюргера  $\bar{b}$  и осью  $z$ ;  $\theta$  — угол между осью  $x$  и проекцией вектора Бюргера на плоскость залегания петли  $z=0$ . При рассмотрении прохождения дислокаций в системе  $(0001) \langle 11\bar{2}0 \rangle$  через ансамбль указанных дислокационных деталей в ГПУ кристаллах достаточно определить лишь скальвающие компоненты тензора напряжений в плоскостях, параллельных плоскости петли. Скальвающие компоненты  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  будем определять по формулам Пича — Келера [12]<sup>1</sup>. Используя параметрическое задание дислокационной петли в форме  $x' = a \cos \varphi$ ,  $y' = a \sin \varphi$ ,  $z' = 0$  и переходя к новой переменной  $\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi - \alpha}{2}$ , контурные интегралы, входящие в формулу Пича — Келера, можно привести к полным эллиптическим интегралам, а компоненты  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  к следующему виду:

$$\tau_{xz} = \frac{Gb}{2\pi a (1-\nu) \sqrt{(1+u)^2 + v^2}} \left\{ K(k) [A_1 \cos \alpha + B_1 \cos \alpha + C_1 \cos(\alpha + \beta) + D_1 (\cos \theta - \nu \sin \alpha \sin \beta)] + \frac{E(k)}{(1-u)^2 + v^2} [A_2 \cos \alpha + B_2 \cos \alpha + C_2 \cos(\alpha + \beta) + D_2 (\cos \theta - \nu \sin \alpha \sin \beta)] \right\}, \quad (1)$$

$$\tau_{yz} = \frac{Gb}{2\pi a (1-\nu) \sqrt{(1+u)^2 + v^2}} \left\{ K(k) [A_1 \sin \alpha + B_1 \sin \alpha + C_1 \sin(\alpha + \beta) + D_1 (\sin \theta + \nu \cos \alpha \sin \beta)] + \frac{E(k)}{(1-u)^2 + v^2} [A_2 \sin \alpha + B_2 \sin \alpha + C_2 \sin(\alpha + \beta) + D_2 (\sin \theta + \nu \cos \alpha \sin \beta)] \right\},$$

где

$$A_1 = \frac{v \cos \gamma}{(1-u)^2 + v^2} \left[ \frac{1}{u} - 1 + \frac{(1+u)(v^2 + u^2 - 1)}{(1+u)^2 + v^2} \right],$$

$$B_1 = \frac{-v^2(v^2 + u^2 - 1) \sin \gamma \cos \beta}{\langle (1+u)^2 + v^2 \rangle \langle (1-u)^2 + v^2 \rangle},$$

$$C_1 = -\sin \gamma \left[ \nu + \frac{\nu + v^2(1+\nu)}{u^2} \right], \quad D_1 = \sin \gamma,$$

$$A_2 = v \cos \gamma \left[ 3u - \frac{1}{u} - \frac{4u(v^2 + u^2 - 1)^2}{\langle (1+u)^2 + v^2 \rangle \langle (1-u)^2 + v^2 \rangle} \right],$$

$$B_2 = v^2 \cos \beta \sin \gamma \left[ 1 - \frac{8(v^2 - u^2 + 1)}{\langle (1+u)^2 + v^2 \rangle \langle (1-u)^2 + v^2 \rangle} \right],$$

$$C_2 = \sin \gamma \frac{v^2(u^2 + v^2 + 1) + \nu \langle (1+u)^2 + v^2 \rangle \langle (1-u)^2 + v^2 \rangle}{u^2},$$

<sup>1</sup> Вычисление остальных компонентов тензора напряжений может быть произведено по аналогичной схеме и не представляет принципиальных затруднений.

$$D_2 = -\sin \gamma (v^2 + u^2 - 1),$$

$$u = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}, \quad v = \frac{z}{a}, \quad k^2 = \frac{4u}{(1+u)^2 + v^2}.$$

Здесь  $\alpha$  — угол между осью  $x$  и проекцией  $\bar{r}$  радиуса-вектора,  $\bar{r}$  — точки наблюдения  $(x, y, z)$  на плоскость залегания петли,  $z=0$ ,  $\beta = \alpha - \theta$ ,  $G$  — модуль сдвига,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $K(k)$  и  $E(k)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно.

Поле напряжений дислокационной петли с произвольным вектором Бюргерса можно представить как суммарное поле скользящей и призматической дислокационных петель. Поэтому для того, чтобы составить представление о поле напряжений дислокационной петли с произвольным вектором Бюргерса, рассмотрим упомянутые частные случаи.

## § 2. Поле напряжений круговой скользящей дислокационной петли

Вектор Бюргерса скользящей дислокационной петли лежит в плоскости петли (т. е.  $\gamma = 90^\circ$ ). Предположим, что этот вектор Бюргерса составляет угол  $\theta$  с осью  $x$ . При этом выражения (1) для  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  принимают вид

$$\tau_{xz} = \frac{Gb}{2\pi a (1-\nu) \sqrt{(1+u)^2 + v^2}} \left\{ K(k) [A_3 \cos \theta + B_3 \cos (2\alpha - \theta)] + \frac{E(k)}{(1-u)^2 + v^2} [C_3 \cos \theta + D_3 \cos (2\alpha - \theta)] \right\}, \quad (2)$$

$$\tau_{yz} = \frac{Gb}{2\pi a (1-\nu) \sqrt{(1+u)^2 + v^2}} \left\{ K(k) [A_3 \sin \theta + B_3 \sin (2\alpha - \theta)] + \frac{E(k)}{(1-u)^2 + v^2} [C_3 \sin \theta + D_3 \sin (2\alpha - \theta)] \right\}.$$

где

$$A_3 = 1 - \frac{\nu}{2} - \frac{v^2 (v^2 + u^2 - 1)}{2 \langle (1+u)^2 + v^2 \rangle \langle (1-u)^2 + v^2 \rangle},$$

$$B_3 = -\frac{\nu}{2} - \frac{v^2 + \nu (v^2 + 1)}{u^2} - \frac{v^2 (v^2 + u^2 - 1)}{2 \langle (1+u)^2 + v^2 \rangle \langle (1-u)^2 + v^2 \rangle},$$

$$C_3 = \frac{v^2}{2} \left[ 1 - \frac{8(v^2 - u^2 + 1)}{\langle (1+u)^2 + v^2 \rangle \langle (1-u)^2 + v^2 \rangle} \right] - \left( 1 - \frac{\nu}{2} \right) (v^2 + u^2 - 1),$$

$$D_3 = \frac{v^2}{2} \left[ 1 - \frac{8(v^2 - u^2 + 1)}{\langle (1+u)^2 + v^2 \rangle \langle (1-u)^2 + v^2 \rangle} \right] + \frac{v^2 (v^2 + u^2 + 1) + \nu \langle (1+u)^2 + v^2 \rangle \langle (1-u)^2 + v^2 \rangle}{u^2} - \frac{\nu (v^2 + u^2 - 1)}{2}.$$

Соотношения (2) в частном случае при  $\theta = 0^\circ$  совпадают с результатами работ [7, 8], если исправить допущенные в этих работах ошибки.

Из соотношения (2) следует, что компоненты  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  поля напряжений скользящей петли в плоскостях  $v = \text{const}$  центросимметричны относительно точки  $u=0$ , т. е. замена  $u$  на  $u+\pi$  не меняет значения напряжений, и симметричны относительно прямых  $\alpha = \frac{\theta}{2}$  и  $\alpha = \frac{\pi + \theta}{2}$ .

В связи с этим для характеристики полей  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  в плоскостях  $v = \text{const}$

достаточно определить их значение лишь в одной четверти соответствующей плоскости.

Численный расчет проводился для компонента  $\tau_{xz}$  в плоскостях  $v=0; 0,5; 1$  и  $2$  при  $\theta=30^\circ$ . Результаты расчета приведены на рис. 1. Видно, что скользящая петля создает знакопеременное поле весьма сложного вида. Характер изменения  $\tau_{xz}$  вдоль прямых  $\alpha = \frac{\theta}{2}$  и  $\alpha =$

$= \frac{\pi + \theta}{2}$  для  $v=0; 0,5; 1$  и  $2$  и  $\theta=30^\circ$  можно видеть на рис. 2. Полу-

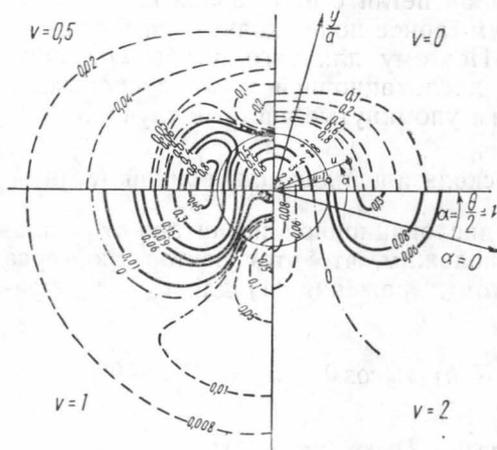


Рис. 1. Поле  $\tau_{xz}$  в плоскостях  $v=\text{const}$  для круговой скользящей петли. Значения  $\tau_{xz}$  даны в единицах  $Gb/2\pi(1-v)a$ ;  $\theta=30^\circ$ . Сплошные линии соответствуют положительным значениям  $\tau_{xz}$ , пунктирные — отрицательным, штрих-пунктирные — нулевому уровню  $\tau_{xz}$

ченные данные показывают, что в плоскостях  $V=\text{const}$   $\tau_{xz}$  убывает при увеличении расстояния от центра петли не монотонно, а достигает некоторых экстремальных положительных и отрицательных значений. При этом по мере удаления от плоскости залегания петли, т. е. при увеличении  $V$ , абсолютная величина максимальных и минимальных значений  $\tau_{xz}$  уменьшается.

На рис. 3 приведена зависимость  $\tau_{xz}$  от расстояния  $V$  в точках на прямой, проходящей через центр петли перпендикулярно плоскости ее залегания, т. е. при  $u=0$ . Видно, что  $\tau_{xz}$  падает практически до нуля на расстояниях  $V \sim 2$ .

### § 3. Поле напряжений круговой призматической дислокационной петли

В этом случае  $\gamma=0$  и соотношение (1) для  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  принимает вид

$$\tau_{xz} = \frac{Gb}{2\pi a(1-v)\sqrt{(1+u)^2+v^2}} \cos \alpha \left\{ K(k) A_4 + \frac{E(k)}{(1-u)^2+v^2} B_4 \right\}, \quad (3)$$

$$\tau_{yz} = \frac{Gb}{2\pi a(1-v)\sqrt{(1+u)^2+v^2}} \sin \alpha \left\{ K(k) A_4 + \frac{E(k)}{(1-u)^2+v^2} B_4 \right\},$$

где

$$A_4 = v \left[ \frac{1}{u} - 1 + \frac{(1+u)(v^2+u^2-1)}{(1+u)^2+v^2} \right] \frac{1}{(1-u)^2+v^2},$$

$$B_4 = v \left[ 3u - \frac{1}{u} - \frac{4u(v^2+u^2-1)}{\langle(1+u)^2+v^2\rangle \langle(1-u)^2+v^2\rangle} \right].$$

Полученные соотношения показывают, что поля напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  призматической петли не обладают центром симметрии в плоскостях  $v=\text{const}$ . В этом случае значения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  в точках на линии  $\alpha=\text{const}$  равны по величине, но противоположны по знаку значениям в точках  $\alpha+\pi$ , а прямые  $\alpha=0$  и  $90^\circ$  являются линиями нулевого уровня напряжения соответственно для компонентов  $\tau_{yz}$  и  $\tau_{xz}$ .

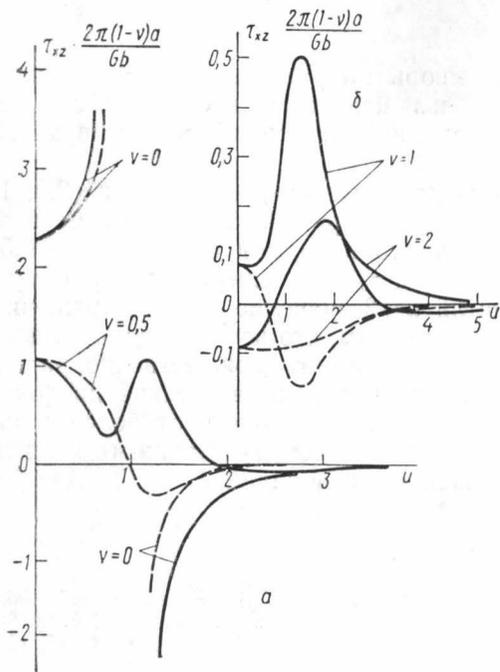


Рис. 2. Зависимость  $\tau_{xz}$  от рассеяния  $u$  вдоль прямых  $\alpha=\theta/2$  (сплошные кривые) и  $\alpha=\pi+\theta/2$  (пунктирные кривые) для круговой скользящей петли при  $\theta=30^\circ$

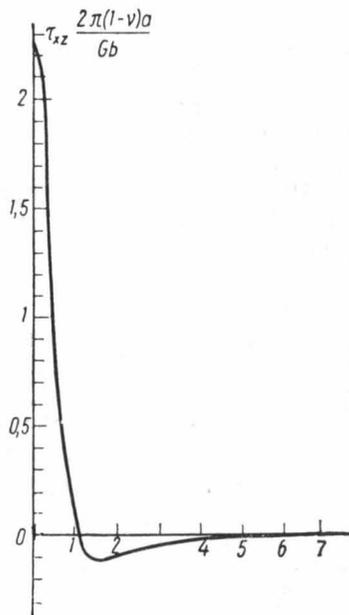


Рис. 3. Зависимость  $\tau_{xz}$  от рассеяния  $v$  при  $u=0$  для случая скользящей петли при  $\theta=30^\circ$

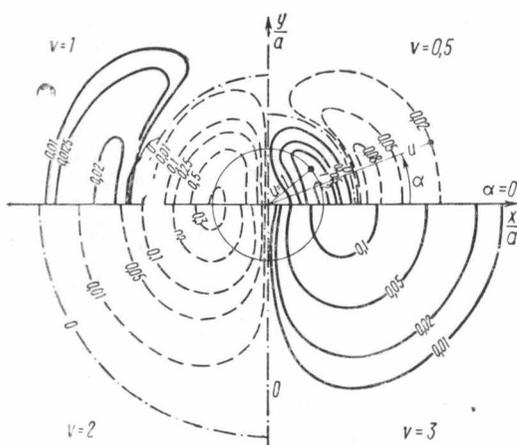


Рис. 4. Поле напряжений  $\tau_{xz}$  в плоскостях  $u$ . Обозначения те же, что и на рис. 1

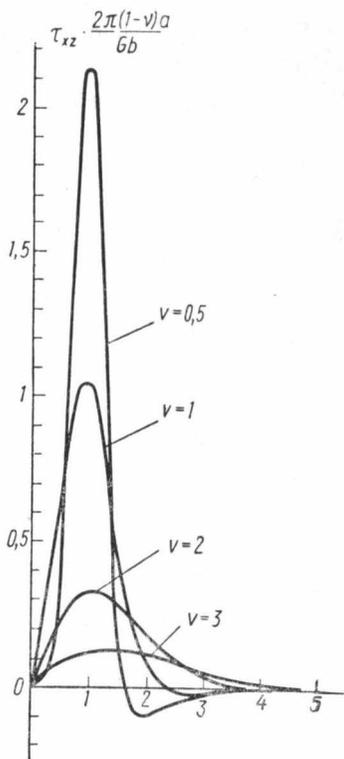


Рис. 5. Зависимость  $\tau_{xz}$  от рассеяния  $u$  вдоль прямой  $\alpha=0^\circ$  для круговой призматической петли дислокации на плоскостях  $v=0,5; 1; 2$  и  $3$

Таким образом, для получения эпюры напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  на плоскостях  $v = \text{const}$ , как и в случае скользящей петли, достаточно определить значения напряжений лишь в одной четверти соответствующей плоскости.

Численные расчеты проводились для компонента  $\tau_{xz}$  для  $v = 0,5; 1; 2$  и  $3$ . Соответствующие эпюры приведены на рис. 4. На рис. 5 представлена зависимость  $\tau_{xz}$  от расстояния  $u$  вдоль прямой  $\alpha = 0^\circ$  при  $v = 0,5; 1; 2$  и  $3$ . В случае призматической петли  $\tau_{xz}$  проходит через максимум и минимум, а на расстоянии от петли  $u \sim 2$  значение поля напряжений  $\tau_{xz}$  становится пренебрежимо малым. Заметим, что во всех точках в плоскости залегания петли, т. е. при  $v = 0$ ,  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  тождественно равны нулю. Из сравнения рис. 2 и 5 следует, что призматические дислокационные кольца при прочих одинаковых условиях создают более сильные возмущающие поля, чем скользящие, а потому должны вносить больший вклад в сопротивление движению дислокаций.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kuhlmann—Wilsdorf D., Wilsdorf N. G. F. J. Appl. Phys., **31**, 516, 1960.
2. Кимира Г., Маддин Р. Дефекты в закаленных металлах. М., 1969, стр. 188.
3. Smallman R. E., Westmacott K. H., Coiley J. H. J. Inst. Metals., **88**, 127, 1959—1960.
4. Holmes D. K. Interaction of Radiation with Solids. Ed. Billington, London, 1962.
5. Makin M. J. Phil. Mag., **9**, 81, 1964.
6. Kröner E. Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Berlin, Springer, 1958.
7. De Chatel P., Kovacs I. Phys. Stat. Sol., **10**, 213, 1965.
8. Marcinkowski M. J., Sree Harsha K. S. J. Appl. Phys., **39**, 1775, 1968.
9. Кroupa F. Phil. Mag., **7**, 783, 1962.
10. Boullough R., Newman R. C. Phil. Mag., **5**, 921, 1960.
11. Кroupa F., Czech S. Physics., **B10**, 284, 1960.
12. Peach M. O., Koehler J. S. Phys. Rev., **80**, 436, 1950.

Поступила в редакцию  
19.6 1972 г.

Кафедра  
физики кристаллов