Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1974

УДК 539.1.01.

А. Х. МУССА, Ю. Г. ПАВЛЕНКО, В. И. ПЕТУХОВ

ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В ОНДУЛЯТОРЕ С ВИНТОВЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Исследовано излучение электронов в ондуляторе с винтовым магнитным полем $\mathbf{H}=(-H\sin ay,\ 0,\ H\cos ay)$ и показано, что при увеличении напряженности магнитного поля максимум интенсивности излучения смещается с первой гармоники в область высоких гармоник.

В ряде теоретических и экспериментальных работ [1] показано, что при движении релятивистских электронов в магнитных и электрических полях, периодически изменяющихся вдоль траектории, возникает излучение в диапазоне от миллиметровых волн до видимого света. Подобные системы получили название ондуляторов. При увеличении энергии электронов максимум излучения смещается в более коротковолновую часть спектра.

В последнее время значительно возрос интерес к использованию ондуляторов в качестве источников излучения в ультрафиолетовой и рентгеновской спектроскопии. Теоретические исследования спектрального распределения в том случае, когда угол α отклонения электронов в поле значительно меньше угла $\Delta\psi\sim\frac{1}{\gamma}$ ($E=mc^2\gamma$ — энергии электрона), в котором сосредоточена основная часть излучаемой энергии, показали, что максимум излучения приходится на первую гармонику [2—3]. В настоящей работе получены спектральные и угловые характеристики излучения при произвольном соотношении $\alpha\gamma$ и показано, что при $\alpha\gamma\gg 1$ ($\alpha\ll 1$) максимум излучения лежит в области высоких гармоник.

Рассмотрим движение электронов в системе магнитов, создающих «винтовое» магнитное поле с индукцией

$$\mathbf{B}=(-H\sin ay,\ 0,\ -H\cos ay), \tag{1}$$

где $\frac{2\pi}{a}$ — период изменения поля.

Траекторию электрона в поле (1) проще всего найти, исходя из уравнения Гамильтона — Якоби

$$s = -\varepsilon t + p_x \cdot x + p_z \cdot z + \int P(y)\, dy,$$

$$P^2(y) = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - m^2c^2 - \left(p_x + \frac{\Omega}{a}\sin\alpha y\right)^2 - \left(p_z + \frac{\Omega}{a}\cos ay\right)^2. \tag{1}$$

Здесь $\Omega = \frac{eHc}{\varepsilon}$. Предполагая, что начальные условия заданы таким образом, что $\mathbf{r}(0) = 0$, $\mathbf{v}(0) = \left(0,\ \dot{y}_0,\ \frac{\Omega}{a}\right)$, из (1) найдем уравнение траектории

$$x(t) = R\,(1 - \cos\Omega_0 t),$$

$$y(t) = \dot{y}_0 t, \quad R = \frac{\Omega}{a\Omega_0}, \quad \Omega_0 = a\dot{y}_0, \tag{2}$$

$$z(t) = R\sin\Omega_0 t.$$

Из (2) следует, что траектория электрона представляет винтовую линию, ось которой лежит в плоскости $z=0$ параллельно оси y на расстоянии R от нее. Угол α отклонения электрона при пролете через ондулятор определяется соотношением $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Omega}{\Omega_0}$.

Для описания поляризации излучения воспользуемся ортами сферической системы координат с полярной осью, направленной вдоль оси y; $\mathbf{e}_\theta = (\cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta, \cos\theta, \cos\varphi)$, $\mathbf{e}_\varphi = (\cos\varphi, 0, -\sin\varphi)$. Направление орта $\mathbf{n} = (\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta, \sin\theta\cos\varphi)$ совпадает с направлением распространения волны. Стандартным путем [4] находим компоненты поля излучения

$$E_\theta = \frac{ie\omega}{2\pi c}\beta_\perp \frac{e^{i\frac{\omega r}{c}}}{r} \sum_{s=-\infty}^{\infty} i\, I_s'(z)\, e^{-is\varphi}\, 2\pi\delta(\omega\Delta - s\Omega_0), \tag{3}$$

$$E_\varphi = \frac{ie\omega}{2\pi c}\frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{r} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cos\theta - \beta_y}{\sin\theta}\right) I_s(z)\, e^{-is\varphi}\cdot 2\pi\delta(\omega\Delta - s\Omega_0),$$

$$z = \frac{\omega R}{c}\sin\theta,\ \Delta = 1 - \beta_y\cos\theta,\ \beta_\perp = \frac{R\,\Omega_0}{c},\ \ \beta_y = \frac{\dot{y}_0}{c}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что излучение является эллиптически поляризованным. Поляризация вырождается в линейную только при $\theta = \arccos\beta_y$. Частота излучения

$$\omega = \frac{sa\,\dot{y}_0}{1 - \beta_y\cos\theta}. \tag{5}$$

Определяя среднюю интенсивность излучения, согласно [5] найдем спектрально-угловое распределение интенсивности излучения на s-той гармонике, двух компонентов поляризации

$$P_\theta(s, \mathbf{n}) = \frac{e^2 s^2 \Omega_0^2}{2\pi c\,\Delta^3}\left(\frac{\cos\theta - \beta_y}{\sin\theta}\right)^2 I_s^{\,2}(s\,\eta), \tag{6}$$

$$P_\varphi(s, \mathbf{n}) = \frac{e^2 s^2 \Omega_0^2}{2\pi c\,\Delta^3}\, \beta_\perp^2\, I_s'^2(s\eta), \tag{7}$$

$$\eta = \beta_\perp \sin\theta/\Delta.$$

Суммируя по спектру, получим распределение интенсивности по направлениям:

$$P_\theta(\mathbf{n}) = \frac{e^2\Omega_0^2\beta_\perp^2}{32\pi c\,\Delta^5}\,(\cos\theta - \beta_y)^2\,\frac{4+\eta^2}{(1-\eta^2)^{7/2}}, \tag{8}$$

$$P_\varphi(\mathbf{n}) = \frac{e^2\Omega_0^2\beta_\perp^2}{32\pi c\,\Delta^3}\cdot\frac{4+3\eta^2}{(1-\eta^2)^{5/2}}. \tag{9}$$

В дальнейшем ограничимся исследованием излучения в том случае, когда поперечная оси ондулятора составляющая скорости $\frac{\Omega}{a}$ много меньше продольной составляющей $\dot{y}_0$, близкой к скорости света, т. е. случаем $\alpha \ll 1$.

Полагая $\theta = \alpha + \Delta\theta$, находим, что параметр

$$\eta = \frac{2\beta\gamma\alpha(\gamma\alpha + \Delta\theta\cdot\gamma)}{1 + 2\gamma^2\alpha^2 + 2\Delta\theta\alpha\gamma^2} = \begin{cases} 2\beta(\gamma\alpha)\cdot(\gamma\alpha + \Delta\theta\gamma), & \alpha\gamma \ll 1 \\ \beta, & \alpha\gamma \gg 1. \end{cases}$$

Предположим вначале, что $\alpha\gamma \ll 1$. Поскольку $\eta \ll 1$, максимум интенсивности излучения (6)—(7) находится на первой гармонике. Наибольшая частота $\omega = 2\Omega_0\gamma^2$ излучается в направлении оси ондулятора. В этом случае оба компонента вносят почти одинаковый вклад в полную интенсивность излучения

$$P = \frac{e^2\Omega_0^2\gamma^6\alpha^2}{\pi c(1 + 2\gamma^2\alpha^2 + 2\Delta\theta\alpha\gamma^2)^3}\left[1 + \left(\frac{1 - 2\Delta\theta\,\alpha\gamma^2}{1 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\Delta\theta\,\alpha\gamma^2}\right)^2\right]. \tag{10}$$

В противоположном случае $\alpha\gamma \gg 1$ максимум интенсивности смещается в область высоких гармоник, а основная часть излучения сосредоточена в интервале углов $\Delta\theta \sim \frac{1}{\gamma}$ вблизи направления $\Delta\theta \sim \alpha$. Действительно, при $\alpha\gamma \gg 1$ параметр $\eta \sim \beta \leqslant 1$. В этом случае можно воспользоваться асимптотическими формулами [6], справедливыми при $s \gg 1$, $1 - \eta^2 \ll 1$:

$$I_s'(s\eta) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\,\varepsilon^{1/2} K_{1/3}\left(\frac{s}{3}\varepsilon^{3/2}\right),$$

$$I_s(s\eta) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\,\varepsilon K_{2/3}\left(\frac{s}{3}\varepsilon^{3/2}\right), \quad \varepsilon = 1 - \eta^2. \tag{11}$$

Заменяя в (6) и (7) бесселевы функции выражениями (11), получим

$$P_\theta(s, \mathbf{n}) = \frac{e^2 s^2\Omega_0^2}{6\pi^3 c\,\Delta^3}\,\frac{1}{4\gamma^4}\left(\frac{1 - 2\Delta\theta\alpha\gamma^2}{\alpha + \Delta\theta}\right)^2 \varepsilon K_{1/3}^2\left(\frac{s}{3}\varepsilon^{3/2}\right), \tag{12}$$

$$P_\varphi(s, \mathbf{n}) = \frac{e^2 s^2\Omega_0^2}{6\pi^3 c\Delta^3}\,\varepsilon^2\beta^2\alpha^2 K_{2/3}^2\left(\frac{s}{3}\varepsilon^{3/2}\right),$$

$$\varepsilon = \frac{1 + \gamma^2(\Delta\theta)^2}{\alpha^2\gamma^2}, \quad \Delta = \frac{1}{2\gamma^2} + \alpha^2 + \alpha\,\Delta\theta. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует, что интенсивность достигает максимума при $\frac{s}{3}\varepsilon^{3/2}\sim 1$, т. е. на гармониках $s\sim 3\varepsilon^{-3/2}$, быстро убывающих с ростом $\Delta\theta$. Одновременно с ростом $\Delta\theta$ уменьшается интенсивность излучения. Таким образом, при условии $\alpha\gamma\gg 1$ максимум интенсивности в направлении $\theta\sim\alpha$ $(\Delta\theta=0)$ приходится на частоты в области $\omega\sim s_{\text{кр}}\cdot\frac{\Omega_0}{\Delta}\sim 3\Omega_0\gamma^3\alpha$, так как $s_{\text{кр}}\sim 3\gamma^3\alpha^3$. Эта частота значительно превышает частоту излучения при $\alpha\gamma\ll 1$. Основной вклад в излучение вносит φ-компонент поляризации. При фиксированных энергии электрона и параметрах ондулятора условие $\alpha\gamma\gg 1$ может быть реализовано при использовании магнитов с более сильными полями. Пусть условие $\alpha_1\gamma\ll 1$ выполняется в поле напряженности H_1, а условие $\alpha_2\gamma\gg 1$ — в поле H_2. Тогда отношение интенсивностей излучения в первом и втором случаях

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{4\pi^2}{3}\gamma^4\left(\frac{\alpha_1\gamma}{\alpha_2\gamma}\right)^2=\frac{4\pi^2}{3}\gamma^4\left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2.$$

Из этого отношения видно, что интенсивность дипольного излучения всегда превышает интенсивность излучения на высоких гармониках.

Отметим, что в том случае, когда полный угол отклонения частицы велик по сравнению с $\Delta\theta\sim\frac{1}{\gamma}$, общие формулы для спектрально-угловых характеристик излучения в любом внешнем поле могут быть получены методом Швингера [6]. В основе метода лежит то обстоятельство, что при условии $\alpha\gamma\gg 1$ излучение в заданном направлении формируется небольшим участком траектории, направление касательной к которому близко к направлению распространения излучения. Приведенная ниже формула (14) является в известной мере обобщением метода Швингера (поскольку ранее [6, 7] этот метод применялся к квадратичным по вектор-потенциалу формам без разделения по состояниям поляризации).

Свяжем с частицей трехгранник Френе [8] с ортами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ $(\mathbf{e}_3=[\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2])$, направленными соответственно по касательной и к центру кривизны траектории. Направление распространения волны определяется вектором $\mathbf{n}$, задаваемым углами ψ и χ (ψ — угол между $\mathbf{n}$ и плоскостью $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, χ — угол между проекцией $\mathbf{n}$ на плоскость $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ и ортом $\mathbf{e}_1$). Для описания поляризации воспользуемся ортами $\mathbf{e}_\psi$, $\mathbf{e}_\chi$ перпендикулярными направлению распространения излучения:

$$\mathbf{e}_\chi=(-\sin\chi,\ \cos\chi,\ 0),\quad \mathbf{e}_\psi=(-\sin\psi\cos\chi,\ -\sin\psi\sin\chi,\ \cos\psi).$$

Согласно [6] при вычислении поля излучения уравнение траектории достаточно представить в виде

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t_0)+\mathbf{v}\tau+\ddot{\mathbf{v}}\frac{\tau^2}{2}+\frac{\dddot{\mathbf{v}}\tau^3}{6}\quad(\tau=t-t_0).$$

Используя это приближение, найдем выражение для любой из двух спектральных составляющих электрического поля излучения:

$$E_\lambda(\omega)=\frac{ie\omega}{2\pi c\sqrt{3}}2\sqrt{\frac{-2}{\mathbf{n}\ddot{\beta}}}\left(1-\mathbf{n}\beta+\frac{(\mathbf{n}\dot{\beta})^2}{2\mathbf{n}\ddot{\beta}}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\frac{e^{ikr}}{r}[C_\lambda K_{1/3}(\zeta)+iD_\lambda K_{2/3}(\zeta)],\tag{14}$$

$$C_\lambda = \mathbf{e}_\lambda \boldsymbol{\beta} - \mathbf{e}_\lambda \dot{\boldsymbol{\beta}} \frac{\mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\beta}}}{\mathbf{n}\ddot{\boldsymbol{\beta}}} + \mathbf{e}_\lambda \ddot{\boldsymbol{\beta}} \left[\frac{1}{\mathbf{n}\ddot{\boldsymbol{\beta}}} (1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}) + \left(\frac{\mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\beta}}}{\mathbf{n}\ddot{\boldsymbol{\beta}}} \right)^2 \right],$$

$$D_\lambda = \mathbf{e}_\lambda \dot{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{e}_\lambda \ddot{\boldsymbol{\beta}} \frac{\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}}{\mathbf{n}\ddot{\mathbf{v}}} \left(1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta} + \frac{\mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\beta}}}{\mathbf{n}\ddot{\boldsymbol{\beta}}} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{-2}{\mathbf{n}\ddot{\boldsymbol{\beta}}}},$$

$$\zeta = \frac{2}{3} \omega \left[1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta} + \frac{(\mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{2\mathbf{n}\ddot{\boldsymbol{\beta}}} \right]^{1/2} \sqrt{\frac{-2}{\mathbf{n}\ddot{\boldsymbol{\beta}}}}, \quad \lambda = \chi, \psi.$$

Выражение (14) позволяет найти энергию, излучаемую частицей в интервале частот $d\omega$ при движении по произвольной траектории в том случае, когда угол, в котором сосредоточено излучение, значительно меньше угла поворота частицы во внешнем поле. Учитывая, что в рассматриваемом нами случае движения по винтовой линии

$$1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2 + \chi^2 \right), \ \mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\beta}} = \beta \Omega_0 \chi \sin\alpha, \ \mathbf{n}\ddot{\boldsymbol{\beta}} = -\beta \Omega_0^2 \sin\alpha,$$

найдем из (14) выражения для полной интенсивности излучения

$$P = \frac{e^2 \omega^2 \alpha^2}{6\pi^3 \Omega_0 c} \varepsilon^2 \left[K^2_{2/3}(\zeta) + \frac{\psi^2}{\alpha^2 \varepsilon} K^2_{1/3}(\zeta) \right], \qquad \zeta = \frac{\omega \alpha^2}{3\Omega_0} \varepsilon^{3/2}. \tag{15}$$

Из (15) следует, что интенсивность излучения достигает максимума при $\zeta \sim 1$, т. е. на частотах $\omega \sim 3\Omega_0 \gamma^3 \alpha (1 + \gamma^2 \psi^2)^{-3/2}$, быстро убывающих с ростом ψ, если $\psi\gamma > 1$. Одновременно с ростом ψ уменьшается интенсивность излучения. Таким образом, при условии $\alpha\gamma \gg 1$ максимум интенсивности приходится на частоту $\omega \sim 3\Omega_0 \gamma^3 \alpha$, значительно превышающую частоту излучения при $\alpha\gamma \ll 1$.

Отметим, что аналогичный эффект имеет место при движении электрона по винтовой линии вдоль силовых линий постоянного однородного магнитного поля. В этом случае $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\beta_\perp}{\beta_\parallel}$, а максимум интенсивности при условии $\alpha\gamma \gg 1$ лежит на частоте $\omega \sim 3\Omega_0 \gamma^3 \alpha ((\beta_\perp) \beta_\parallel$ соответственно поперечная и продольная составляющие скорости относительно направления поля).

В заключение авторы благодарят участников семинара А. А. Соколова за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миллиметровые и субмиллиметровые волны. М., 1959.
2. Корхмазан Н. А. «Изв. АН АрмССР», физика, **5**, 287, 418, 1970.
3. Алиханян А. И. и др. Письма в ЖЭТФ, **15**, 142, 1972.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1960, § 66.
5. Сб. «Синхротронное излучение», под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова. М., 1966, стр. 38.
6. Shwinger J. Phys. Rev., **75**, 1912, 1949.
7. Байер В. Н., Катков В. М. ЖЭТФ, **53**, 194, 1968.
8. Фиников С. П. Дифференциальная геометрия. М., 1961.

Поступила в редакцию
6.6 1972 г.

Кафедра
теоретической физики