Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1974.

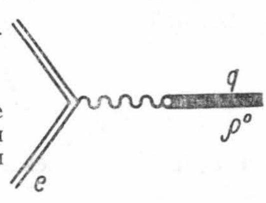
УДК 539.126

Д. В. ГАЛЬЦОВ, Н. С. НИКИТИНА

МАГНИТОТОРМОЗНОЕ РОЖДЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ МЕЗОНОВ

В рамках модели векторной доминантности рассмотрено рождение векторных мезонов при движении релятивистских электронов в сильном магнитном поле. Показано, что в условиях пульсаров процесс может происходить, начиная с энергий электрона порядка 10^4 *Гэв*.

При движении ультрарелятивистских электронов в сильном магнитном поле помимо получения фотонов [1], рождения электрон-позитронных и мюонных пар [2] может происходить также рождение сильно взаимодействующих частиц. Вероятности таких процессов могут быть вычислены на основании тех или иных модельных представлений о структуре электромагнитного тока адронов. Наиболее простой, по-видимому, является модель векторной доминантности [3], в которой предполагается, что адронный электромагнитный ток совпадает с линейной комбинацией полей нейтральных векторных мезонов ρ°, ω, φ. В рамках этой модели любой процесс, сопровождающийся излучением фотона, может (если это не противоречит закону сохранения энергии-импульса) также сопровождаться рождением нейтральной векторной частицы. В настоящей работе вычисляется вероятность рождения векторного мезона (для определенности ρ°-мезона) при движении электрона в однородном магнитном поле. Аналогичный процесс в кулоновском поле был рассмотрен в работе [4].



Диаграмма, описывающая магнитотормозное рождение ρ°-мезона в модели векторной доминантности. Двойная линия соответствует электрону во внешнем магнитном поле

Как и в задаче о магнитотормозном излучении, будем учитывать влияние внешнего поля точно, т. е. выбираем представление Фарри. Соответствующая фейнмановская диаграмма показана на рисунке. Вершине фотон-векторный мезон сопоставляется константа связи $\mu^2/2\gamma_\rho$, где μ — масса векторной частицы, $\gamma_\rho^2/4\pi \sim 0{,}5$.

Решения уравнения Дирака для электрона в однородном магнитном поле хорошо известны [1]. Состояния электрона характеризуются спиновым ($\zeta = \pm 1$) и орбитальными (p_z, $n=0, 1, 2, ..., s=0, 1, 2, ...$) квантовыми числами (ось z системы координат выбрана вдоль направления магнитного поля). В системе отсчета, в которой составляющая начального импульса вдоль поля равна нулю, энергия электрона определяется формулой

$$p_0 = m\sqrt{1 + 2n\frac{H}{H_0}} \qquad (\hbar = c = 1),$$

где $H_0 = \frac{m^2}{e} \simeq 1{,}3 \cdot 10^{13}$ абс. хэвисайдовских единиц.

В результате «излучения» ρ°-мезона с импульсом q_μ (без ограничения общности считаем, что импульс лежит в плоскости yz) электрон переходит в состояние, характеризующееся квантовыми числами $n' = n - \nu$ и $p_z' = -q_z = -q\cos\theta$. Минимальное значение числа ν определяется условием $\vec{q} = 0$, что дает

$$\nu_0 \simeq \frac{\mu p_0}{m^2}\frac{H_0}{H} \gg 1. \tag{1}$$

Условием (1) и определяется основное кинематическое отличие (помимо различных поляризационных свойств) процесса излучения частицы с конечной массой покоя от излучения фотона. В частности, заранее очевидно, что рассматриваемый процесс может осуществляться только при очень больших энергиях электрона, когда отношение $\frac{m}{p_0} = \sqrt{\varepsilon_0}$ мало. В дальнейшем все выражения будут систематически разлагаться по малым параметрам $\sqrt{\varepsilon_0}$ и $\cos\theta$ (последний параметр мал, поскольку излучение ультрарелятивистской частицы сосредоточено в интервале углов $\cos\theta \sim \sqrt{\varepsilon_0}$).

Матричный элемент, соответствующий диаграмме, показанной на рисунке, имеет вид

$$M_{nn'} = \frac{e^2}{2\gamma_\rho}\frac{e^*_\mu(\vec{q}, \lambda)\, j^\mu_{nn'}(\vec{q})}{\sqrt{2q_0}}. \tag{2}$$

Здесь $e_\alpha(\vec{q}, \lambda)$ — 4-векторы поляризации векторного мезона ($\lambda = 1, 2, 3$);

$$j^\mu_{nn'}(\vec{q}) = \int \overline{\Psi}_{n's'p_z'}(\vec{r})\, \gamma^\mu\, \Psi_{nso}(\vec{r})\, e^{-i\vec{q}\vec{r}} d^3\vec{r} \tag{3}$$

Фурье-компоненты тока перехода.

Вычисление интегралов в (3) приводит к функциям Лагерра [1]:

$$I_{nn'}(x) = \frac{1}{\sqrt{n!n'!}} e^{-x/2} x^{\frac{n-n'}{2}} Q_n^{n-n'}(x),$$

где $Q_n^{n-n'}(x)$ — обобщенные полиномы Лагерра,

$$x = \frac{(q_0^2 - \mu^2)}{2eH}\sin^2\theta. \tag{4}$$

Законы сохранения энергии и проекции импульса на направление поля дают для энергии мезона следующее выражение:

$$q_0 = \frac{p_0}{\sin^2\theta}\left(1 - \sqrt{1 - \left[2\nu\frac{H}{H_0} + \left(\frac{\mu}{m}\cos\theta\right)^2\right]\varepsilon_0\sin^2\theta}\right). \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (4), в результате разложения в ряд по ε_0 и $\cos\theta$ найдем

$$x = x_0\left[1 - \sqrt{\frac{n}{n'}}\left(\varepsilon_0 + \cos^2\theta + \frac{\nu_0^2}{4nx_0}\sqrt{\frac{n'}{n}}\right)\right].$$

Далее предположим, что электрон в конечом состоянии остается релятивистским, точнее:

$$\varepsilon_0\sqrt{\frac{n}{n'}} \ll 1.$$

При этом условии аргумент функций Лагерра x мало отличается от $x_0 = (\sqrt{n} - \sqrt{n'})^2$, и мы можем использовать аппроксимацию [1]:

$$I_{nn'}(x) \simeq \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{1/2} K_{1/3}\left[\frac{2}{3}\sqrt[4]{nn'x_0^2}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{3/2}\right]. \qquad (6)$$

Как будет показано ниже, точность этого приближения достаточна, если дополнительно воспользоваться градиентной инвариантностью матричного элемента.

Вводя обозначения

$$\xi = \frac{3}{4n}\left(\frac{p_0}{m}\right)^{3/2}; \qquad y = \frac{2}{3}\frac{H_0}{H}\frac{m}{p_0}\frac{q_0}{p_0 - q_0}$$

и учитывая вытекающие отсюда соотношения

$$\sqrt{\frac{n}{n'}} = 1 + \xi y; \qquad x_0 = n\left(\frac{\xi y}{1 + \xi y}\right)^2,$$

получим

$$1 - \frac{x}{x_0} = \varepsilon_1(1 + \xi y), \qquad \varepsilon_1 = \left(1 + \frac{\mu^2}{m^2}\frac{1 + \xi y}{\xi^2 y^2}\right)\varepsilon_0 + \cos^2\theta.$$

Фурье-образы компонентов тока перехода (3) в этих обозначениях имеют следующий вид:

$$j^1_{nn'} \simeq \delta_{p_z', -q\cos\theta} I_{ss'}(x)\frac{i\sqrt{\varepsilon_1(1 + \xi y)}}{\pi 4\sqrt{3}}\{[(\zeta + \zeta')\sqrt{\varepsilon_0} - (1 - \zeta\zeta')\cos\theta]\xi y K_{1/3} -$$

$$- (1 + \zeta\zeta')(2 + \xi y)\sqrt{\varepsilon_1}K_{2/3}\}; \qquad (7)$$

$$j^2_{nn'} \simeq j^0_{nn'} \simeq \delta_{p_z', -q\cos\theta} I_{ss'}(x)\frac{\sqrt{\varepsilon_1(1 + \xi y)}}{\pi 2\sqrt{3}}(1 + \zeta\zeta')\left[K_{1/3} - \frac{1}{2}\xi y\sqrt{\varepsilon_1}K_{2/3}\right];$$

$$j^3_{nn'} \simeq \delta_{p_z', -q\cos\theta} I_{ss'}(x)\frac{\sqrt{\varepsilon_1(1 + \xi y)}}{\pi 4\sqrt{3}}\xi y\{[(\zeta' - \zeta)\sqrt{\varepsilon_0} -$$

$$- (1 + \zeta\zeta')\cos\theta]K_{1/3} - (1 - \zeta\zeta')\sqrt{\varepsilon_1}K_{2/3}\},$$

где аргумент функций Макдональда $K_{1/3}$ и $K_{2/3}$

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)^{3/2} y.$$

Вероятность перехода в единицу времени, просуммированная по состояниям поляризации векторного мезона, определяется формулой

$$dw = \frac{1}{4\gamma_\rho^2}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \sum_{n', p_z', \zeta, \zeta', s'} (\vec{j}^{\,*}_{nn'} \vec{j}_{nn'} - \overset{0*}{j}_{nn'} \overset{0}{j}_{nn'})\, \delta(p_0 - p_0' - q_0) \frac{d^3\vec{q}}{q_0}. \tag{8}$$

Из выражений (7) видно, что компоненты тока, входящие в (8), получены с разной точностью: $(\overset{1}{j}_{nn'})^2$ и $(\overset{3}{j}_{nn'})^2$ порядка ε_0^2, а $(\overset{0}{j}_{nn'})^2$ и $(\overset{2}{j}_{nn'})^2 \sim \sim \sqrt{\varepsilon_0^3}$, причем в квадрат матричного элемента (3) отличный от нуля вклад дает слагаемое порядка ε_0^2. Таким образом, $(\overset{0}{j}_{nn'})^2$ и $(\overset{2}{j}_{nn'})^2$ должны быть вычислены с точностью до ε_0^2. Это можно сделать путем дополнительного использования градиентной инвариантности, не прибегая к вычислению следующих членов разложения в (6):

$$q_\mu j^\mu(\vec{q}) = q_0 \overset{0}{j}_{nn'} - q \overset{2}{j}_{nn'} \sin\theta - q \overset{3}{j}_{nn'} \cos\theta = 0. \tag{9}$$

Получив из формулы (5) соотношение

$$\frac{q}{q_0} \simeq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{m}\,\frac{1+\xi y}{\xi y}\right)^2 \varepsilon_0$$

и подставляя его вместе с выражением (7) в (9), вычислим разность $|\overset{2}{j}_{nn'}|^2 - |\overset{0}{j}_{nn'}|^2$ с требуемой точностью:

$$|\overset{2}{j}_{nn'}|^2 - |\overset{0}{j}_{nn'}|^2 = \frac{1+\xi y}{6\pi^2}\,\varepsilon_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)(1 + \zeta\zeta')\, K^2_{1/3}(z).$$

Проводя в выражении (8) интегрирование по q с помощью δ-функции, суммирование по p_z', ζ', s', усреднение по ζ и, наконец, заменяя суммирование по n' интегрированием по y, придем к следующему выражению:

$$w = \frac{1}{\gamma_\rho^2}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{np_0\xi^2}{6\pi} \int_{y_0}^{\infty} \frac{y\,dy}{(1+\xi y)^3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varepsilon_1 \{[4(1+\xi y)(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) +$$

$$+ 2\xi^2 y^2(\varepsilon_0 + \cos^2\theta)]\, K^2_{1/3}(z) + \varepsilon_1[(2+\xi y)^2 + \xi^2 y^2]\, K^2_{2/3}(z)\} \sin\theta\, d\theta,$$

где

$$y_0 = \frac{\mu}{\xi p_0}.$$

Интегралы по θ вычисляются обычным способом [1], в результате чего запишем

$$w = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4\gamma_\rho^2}\,\frac{H}{H_0}\, m \int_{y_0}^{\infty} dy \left[f(y)\, K_{2/3}(\eta(y)) - g(y) \int_{\eta(y)}^{\infty} K_{1/3}(x)\, dx \right], \tag{10}$$

где

$$\eta(y) = y\left(1 + \frac{\mu^2}{m^2}\,\frac{1+\xi y}{\xi^2 y^2}\right)^{3/2},$$

$$f(y)=2\frac{1+(1+\xi y)^2}{(1+\xi y)^3}\left(1+\frac{\mu^2}{m^2}\frac{1+\xi y}{\xi^2 y^2}\right),\qquad g(y)=\frac{2+\frac{\mu^2}{m^2}}{(1+\xi y)^2}.$$

Далее рассмотрим в выражении (10) первый интеграл. Ввиду быстрого убывания функции $K_{2/3}(\eta(y))$ при больших значениях аргумента очевидно, что существенный вклад дает та область переменной y, в которой функция $\eta(y)$ принимает наименьшее значение. Найдем точку минимума $\eta(y)$:

$$\frac{\partial\eta(y_1)}{\partial y}=0;\qquad y_1=\frac{\mu^2}{2m^2\xi};\qquad \frac{\partial^2\eta(y_1)}{\partial y^2}=\frac{\sqrt{3}}{y_1}.$$

Результат интегрирования будет существенно различным при $y_1\gg 1$ и $y_1\ll 1$. Ограничимся рассмотрением случая

$$\frac{\mu^2}{mp_0}\frac{H_0}{H}\gg 1. \tag{11}$$

При этом условии аргумент η функции $K_{2/3}$ всюду велик и для последней можно воспользоваться асимптотическим разложением

$$K_{2/3}(\eta)\simeq\sqrt{\frac{\pi}{2\eta}}\,e^{-\eta}.$$

В окрестности минимума функция $\eta(y)$ может быть аппроксимирована параболой

$$\eta(y)\simeq 3\sqrt{3}\,y_1+\frac{\sqrt{3}}{2y_1}(y-y_1)^2.$$

Наконец, функцию $f(y)$ возьмем в точке y_1 и вынесем за знак интегрирования. Окончательно получим

$$\int\limits_{y_0}^{\infty}f(y)\,K_{2/3}(\eta(y))\,dy\simeq 4\pi\frac{m^2}{\mu^2}e^{-3\sqrt{3}y_1}. \tag{12}$$

Обратимся ко второму интегралу в (10). Интегрируя по частям, приведем его к виду

$$\frac{2y_1}{1+\xi y_0}\int\limits_{\eta(y_0)}^{\infty}K_{1/3}(x)\,dx-2y_1\int\limits_{y_0}^{\infty}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{K_{1/3}(\eta(y))}{1+\xi y}\,dy. \tag{13}$$

Величина

$$\eta(y_0)\simeq\frac{2}{3}\frac{\mu p_0}{m^2}\frac{H_0}{H}\gg 1,$$

причем

$$\frac{\eta(y_0)}{y_1}-\frac{p_0^2}{\mu m}\gg 1.$$

Поэтому вклад первого интеграла в (13) при выполнении условия (11) пренебрежимо мал по сравнению с интегралом (12). Второй интеграл в (13) может быть вычислен аналогично (12), при этом, поскольку $\frac{\partial\eta(y_1)}{\partial y}=0$, его вклад также мал. Таким образом, вкладом выражения (13) можно пренебречь.

Окончательно для вероятности рождения ρ°-мезона при условии (11) получим следующее приближенное выражение:

$$w \simeq \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \frac{\pi\sqrt{3}}{\gamma_\rho^2} \frac{m^2}{\mu^2} \frac{H}{H_0} m \exp\left(-\sqrt{3}\,\frac{\mu^2}{mp_0}\frac{H_0}{H}\right).$$

Из этой формулы видно, что фактически рождение векторных мезонов начинается при энергии электрона

$$p_0\,(\text{Гэв}) \simeq \frac{\mu^2}{m}\frac{H_0}{H} \simeq \frac{5\cdot 10^{16}}{H\,(\text{гаусс})}$$

и, очевидно, может осуществляться лишь при очень больших значениях H. В частности, рассмотренный процесс может реализоваться в условиях пульсаров, где обычно предполагается $H \sim 0{,}1\,H_0$. При этом для рождения ρ°-мезона необходима энергия электрона порядка 10^4 *Гэв*. В случае мюонов требуемая энергия в $\frac{m_\mu}{m_e}$ раз больше.

В заключение отметим, что ввиду аналогичной кинематики проделанный расчет в вычислительном отношении близок к расчету процесса «излучения» пиона протоном, исследованного в [5].

Авторы благодарят проф. А. А. Соколова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. «Синхротронное излучение», сб. под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова. М., 1966.
2. Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М. «Ядерная физика», **14**, 1020, 1971.
3. Электромагнитные взаимодействия и структура элементарных частиц, сб. статей под ред. А. М. Балдина. М., 1969.
4. Andersen S. M., Halperin A., Primakoff H. Ann. of Phys., **40**, 54, 1966.
5. Рязанов Г. В. Дипломная работа, МГУ, 1954.

Поступила в редакцию
21.1 1972 г.

Кафедра
теоретической физики