Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1974.

УДК 538.561:621.372.8

Э. И. УРАЗАКОВ

РАССЕЯНИЕ ВОЛНОВОДНЫХ ВОЛН НА ОГРАНИЧЕННЫХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Решается задача о рассеянии произвольной волноводной волны (*TE*- или *TM*-типа) на изотропном ограниченном сгустке. Получены уравнения и коэффициенты рассеяния, связывающие амплитуду падающей волны с электрическими характеристиками среды. Учет неоднородности среды проводится методом возмущений, получено нулевое и первое приближение решения общей задачи.

В связи с коллективными методами ускорения, опытами [1], основанными на когерентном принципе ускорения [2], возникает проблема взаимодействия мощного СВЧ-излучения с ускоряемыми объектами. В выборе оптимального режима ускорения определяющее значение имеет решение задачи о самосогласованном поле волны и сгустка. В настоящей работе вычисляются характеристики взаимодействия СВЧ-волн в волноводе с изотропной ограниченной средой.

Постановка задачи

Электромагнитное поле круглого волновода, представленное в виде *TE*- или *TM*-волн, набегает из вакуума на сгусток вещества с заданными[1] изотропными характеристиками σ, ε, μ (σ — проводимость, ε и μ — электрическая и магнитная проницаемости вещества).

Требуется рассчитать самосогласованное поле и энергетические параметры взаимодействия (силу ускорения сгустка, потери энергии внешнего поля на ускорение).

Исходными уравнениями для электромагнитного поля в волноводе со сгустком вещества возьмем

а) уравнения Максвелла:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad \operatorname{div}\vec{\mathbf{H}} = O, \tag{1}$$

где ρ, $\mathbf{j}$ — плотности заряда и тока источников поля, $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{H}$ — вектор магнитной индукции, уравне-

[1] В вычислениях используется цилиндрическая система координат $\{r, \varphi, z\}$.

ния (1) справедливы для электромагнитного поля в вакууме;

б) уравнения, связывающие в среде характеристики поля с наведенными источниками:

$$\mathbf{j}_u = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}, \qquad \frac{1}{\mu} \mathbf{H} = \mathbf{H} - 4\pi \mathbf{M},$$

$$\varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \tag{2}$$

$\vec{\mathbf{P}}$, $\vec{\mathbf{M}}$ — векторы электрической и магнитной поляризации среды, $\mathbf{j}_u$ — плотность индуцированного тока в среде.

Решние уравнений Максвелла (1) в виде запаздывающих потенциалов внутри круглого волновода позволяет связать электромагнитное поле с возбуждающими его источниками (токами и зарядами).

В общем случае выражение этой связи (в Фурье-представлении) имеет вид

$$E(r, w) = \frac{P(w)}{Q(v)} j(r, w), \tag{3}$$

где

$$\begin{Bmatrix} E(r, w) \\ j(r, w) \end{Bmatrix} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{2\pi} dt dz d\varphi \, e^{i(\omega t - wz - p\varphi)} \begin{Bmatrix} E(r, \varphi, z) \\ j(r, \varphi, z) \end{Bmatrix},$$

$P(w)$, $Q(v)$ — аналитические функции от w и v, определяемые границами волновода; $P(w)$ имеет различный вид для отдельных компонентов электромагнитного поля, величина $Q(v)$ одна и та же для всех составляющих поля. В частности, $Q = I_p(va)$, $I'_p(va)$ — цилиндрическая функция Бесселя первого рода порядка и ее производная соответственно для TE- и TM-волн; $v^2 = k^2 - w^2$ — квадрат поперечного волнового числа, $kc = \omega$ — частота, c — скорость света, a — радиус волновода, j — плотность токов источника.

Переходя к координатному представлению в формуле (3), после интегрирования, получим

$$\frac{d}{dz} E_{i\pm}(z) = -\frac{iv_{pi}}{w_{i\pm}} \frac{P(w_{i\pm})}{Q'(v_{pi})} j(z) \qquad (Im v > 0), \tag{4}$$

$w_{i+} > 0$ — волны справа от источника распространяются направо, $w_{i-} < 0$ — волны слева распространяются налево.

Внутри источника зарождаются оба сорта ($i\pm$) волн. Так как поле в волноводе есть суперпозиция бегущих волн и экспоненциально затухающих полей, имеем

$$\begin{Bmatrix} E_z(r, \varphi, z) \\ H_z(r, \varphi, z) \end{Bmatrix} = \sum_{p, i\pm} \begin{Bmatrix} E_{zp,i\pm}(r, z) e^{ip\varphi} \\ H_{zp,i\pm}(r, z) e^{ip\varphi} \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

где

$$\begin{Bmatrix} E_{zp,i\pm} \\ H_{zp,i\pm} \end{Bmatrix} = I_p(v_{pi} r) e^{iw_{pi} t z} \begin{Bmatrix} f_{pi\pm}(z) \\ g_{pi\pm}(z) \end{Bmatrix}.$$

Учитывая формы (5), уравнение (4) можно преобразовать, раскрывая смысл функций $Q(v)$ и $P(w)$ в круглом волноводе при произвольных источниках:

$$\frac{df_{p,i\pm}}{dz}=\frac{4\pi i}{\omega_{pi}\pm c}\frac{e^{-i\omega_{pi\pm}z}}{[aI_p'(v_{p_i}a)]^2}\int\limits_0^a rdr\times$$

$$\times\left\{-iI_p(v_{p_i}r)\left[\frac{v_i}{k}j_z(r,\ z)-\frac{p\omega_{p_i\pm}}{kv_ir}j_\varphi\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\omega_{p_i\pm}}{k}I_p'(v_{pi}r)\,j_r(r,\ z)\right\} \qquad (6)$$

для амплитуд волн электрического типа,

$$\frac{dg_{p,i\pm}}{dz}=\frac{4\pi i}{\omega_{p_i}\pm c}\frac{e^{-i\omega_{p_i}\pm z}}{\left(a^2-\frac{p^2}{v_{p_i}^2}\right)I_p^2(v_{p_i}a)}\int\limits_0^a rdr\times$$

$$\times\left\{I_p'(v_{p_i}r)\,j_\varphi(r,\ z)+\frac{ip_i}{v_{p_i}r}I_p(v_{p_i}r)\,j_r(r,\ z)\right\}$$

для амплитуд волн магнитного типа.

В свою очередь, токи, входящие в правые части равенств (5), (6), возбуждаются внутри среды полями волн. Их можно выразить с помощью уравнений (2) через поляризующие поля в среде:

$$\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}+\frac{ikc}{4\pi}(1-\varepsilon)\,\mathbf{E}+\frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\mathbf{H}. \qquad (7)$$

Представляя токи сгустка в виде суммы токов, возбужденных отдельными волноводными волнами, выразим их через амплитуды волноводных волн. Подставляя полученные выражения в (6), получим уравнения для амплитуд.

Проделав ряд преобразований, уравнение для амплитуд запишем в следующем виде:

$$\frac{df_{p_1'i}}{dz}=-\frac{1}{2\omega_{p'i}}\left\{\sum_n\left(A_{in}^{ээ}f_{pn}-'A_{in}^{ээ}\frac{df_{pn}}{dz}\right)+i\sum_n\left(A_{in}^{эm}g_{pn}-'A_{in}^{эm}\frac{dg_{pn}}{dz}\right)\right\}, \qquad (8)$$

$$\frac{dg_{p',i}}{dz}=-\frac{1}{2\omega_{p'i}}\left\{\sum_n\left(A_{in}^{mm}g_{pn}-'A_{in}^{mm}\frac{dg_{pn}}{dz}\right)-i\sum_n\left(A_{in}^{mэ}f_{pn}-'A_{in}^{mэ}\frac{df_{pn}}{dz}\right)\right\}, \qquad (9)$$

где коэффициенты A_{in} и $'A_{in}$, описывающие влияние p, n-волны на p', i-тую волну, представлены следующим образом:

$$\left\{\begin{matrix}A_{in}^{ЭЭ}\\ A_{in}^{mm}\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}(Э_i|1|Э_n)+(Э_i|2|Э_n)+(Э_i|3|Э_n)\\ (m_i|1|m_n)+(m_i|2|m_n)+(m_i|3|m_n)\end{matrix}\right\}e_{ni},$$

$$\left\{\begin{matrix}'A_{in}^{ЭЭ}\\ 'A_{in}^{mm}\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}(Э_i|1|Э_n')+(Э_i|2|Э_n')+(Э_i|3|Э_n')\\ (m_i|1|m_n')+(m_i|2|m_n')+(m_i|3|m_n')\end{matrix}\right\}e_{ni}, \qquad (10)$$

$$\left.\begin{matrix}A_{in}^{Эm}\\ A_{n}^{mЭ}\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}(Э_i|2|m_n)+(Э_i|3|m_n)\\ (m_i|2|Э_n)+(m_i|3|Э_n)\end{matrix}\right\}e_{ni},$$

$$\left\{\begin{matrix} {}'A_{in}^{\ni m} \\ {}'A_{in}^{m\ni} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} (\ni_i|2|m_n') + (\ni_i|3|m_n') \\ (m_i|2|\ni_n') + (m_i|3|\ni_n') \end{matrix}\right\} e_{ni}, \tag{11}$$

$$e_{ni} = e^{-i(w_{p'i} - w_{pn})z}.$$

Разложение всех коэффициентов A_{in} на три сорта слагаемых удобно при рассмотрении поля в сгустках с различными видами симметрии.

Отдельные слагаемые в коэффициентах A_{in} имеют вид

$$(\ni_i|1|\ni_n) = (v_{pn}^2 + w_i w_n) I_1^{\ni\ni}(\sigma'') - w_n \frac{d}{dz} I_1^{\ni\ni}(1-\varepsilon) - - w_i \frac{d}{dz} I_1^{\ni\ni}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right),$$

$$(m_i|1|m_n) = k^2 I_1^{mm}(\sigma'') - w_n \frac{d}{dz} I_1^{mm}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right),$$

$$(\ni_i|1|\ni_n') = w_n I_1^{\ni\ni}(1-\varepsilon) + w_i I_1^{\ni\ni}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right), \tag{12}$$

$$(m_i|1|m_n') = w_n I_1^{mm}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right).$$

$$(\ni_i|2|\ni_n) = w_i w_n I_2^{\ni\ni}(\sigma'') + i w_n^2 I_2^{\ni\ni}(1-\varepsilon) - - i v_{pn}^2 I_2^{\ni\ni}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) + w_i \frac{d}{dz} I_2^{\ni\ni}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right), \tag{13}$$

$$(m_i|2|m_n) = k^2 I_2^{mm}(\sigma'') + i v_{pn}^2 I_2^{mm}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) - - w_n \frac{d}{dz} I_2^{mm}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right),$$

$$(\ni_i|2|\ni_n') = w_i I_2^{\ni\ni}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right),$$

$$(m_i|2|m_n') = w_n I_2^{mm}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right).$$

$$(\ni_i|2|m_n) = p\left[k w_i I_2^{\ni m}(\sigma'') + \frac{i}{k}(k^2 - w_i w_n)(w_i - w_n) \times \times I_2^{\ni m}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) - \frac{w_i w_n}{k} \frac{d}{dz} I_2^{\ni m}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\right],$$

$$(m_i|2|\ni_n) = p'\left[k w_n I_2^{m\ni}(\sigma'') - k \frac{d}{dz} I_2^{m\ni}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\right], \tag{13'}$$

$$(\ni_i|2|m_n') = p \frac{w_1 w_n}{k} I_2^{\ni m}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right),$$

$$(m_i|2|\ni_n') = p' k I_2^{m\ni}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right).$$

$$(\ni_i|3|\ni_n) = p\left[w_i w_n I_3^{\ni\ni}(\sigma'') + i w_n^2 I_3^{\ni\ni}(1-\varepsilon) - - i v_{pn}^2 I_3^{\ni\ni}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) + w_i \frac{d}{dz} I_3^{\ni\ni}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\right],$$

$$(m_i|3|m_n) = p'\left[k^2 I_3^{mm}(\sigma'') + iv_{pn}^2 I_3^{mm}\left(1-\frac{1}{\mu}\right) - w_n \frac{d}{dz} I_3^{mm}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\right],$$

$$(Э_i|3|Э_n') = pw_i I_3^{ЭЭ}\left(1-\frac{1}{\mu}\right),$$

$$(m_i|3|m_n') = p'w_n I_3^{mm}\left(1-\frac{1}{\mu}\right). \qquad (14)$$

$$(Э_i|3|m_n) = kw_1 I_3^{Эm}(\sigma'') + \frac{i}{k^2}(k^2 - w_i w_n)(w_i - w_n) \times$$

$$\times I_3^{Эm}\left(1-\frac{1}{\mu}\right) - \frac{w_i w_n}{k}\frac{d}{dz} I_3^{Эm}\left(1-\frac{1}{\mu}\right),$$

$$(m_i|3|Э_n) = kw_n I_3^{mЭ}(\sigma'') - k\frac{d}{dz} I_3^{mЭ}\left(1-\frac{1}{\mu}\right),$$

$$(Э_i|3|m_n') = \frac{w_i w_n}{k} I_3^{Эm}\left(1-\frac{1}{\mu}\right), \qquad (14')$$

$$(m_i|3|Э_n')\, k I_3^{mЭ}\left(1-\frac{1}{\mu}\right),$$

где $\sigma'' = \sigma + \frac{ikc}{4\pi}\left(\frac{1}{\mu} - \varepsilon\right)$, а I_i — интегралы по поперечному сечению волновода, имеющие вид

$$\left\{\begin{matrix} I_1^{ЭЭ}\dfrac{\pi v_{p_i'}}{v_{pn}} N_Э^2 \\ I_1^{mm}\dfrac{\pi v_{pn}}{v_{p_i'}} N_{im}^2 \end{matrix}\right\} = \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(p-p')\varphi} \int_0^a r dr I_{p'}(v_{p'i} r) I_p(v_{pn} r)\Phi(r,\varphi), \qquad (15)$$

$$\left\{\begin{matrix} I_2^{ЭЭ}\pi v_{p_i'} N_{iЭ}^2 \\ I_2^{mm}\pi v_{pn} N_{im}^2 \end{matrix}\right\} = \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(p-p')\varphi}\int_0^a r dr \left\{\begin{matrix} \dfrac{d}{dr}[r I_{p'}(v_{p_i'} r) I_p'(v_{pn} r)]\Phi(r,\varphi) \\ \dfrac{d}{dr}[r I_{p'}'(v_{p_i'} r) I_p(v_{pn} r)]\Phi(r,\varphi) \end{matrix}\right\}, \qquad (16)$$

$$\left\{\begin{matrix} I_2^{Эm}\pi v_{p'i} v_{pn} N_{iЭ}^2 \\ I_2^{mЭ}\pi v_{p'i} v_{pn} N_{im}^2 \end{matrix}\right\} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(p-p')\varphi}\int_0^a r dr \frac{d}{dr}[r I_{p'}(v_{p'i} r) I_{po}(v_{pn} r)] \times$$

$$\times \Phi(r,\varphi), \qquad (17)$$

$$\left\{\begin{matrix} I_3^{ЭЭ}\pi v_{p'i} v_{pn}\cdot N_{iЭ}^2 \\ -I_3^{mm}\pi v_{p'i} v_{pn} N_{im}^2 \end{matrix}\right\} = (p-p')\int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(p-p')\varphi}\int_0^a \frac{dr}{r} I_{p'}(v_{p'i} r) I_p(v_{pn} r)\Phi(r,\varphi), \qquad (18)$$

$$\left\{\begin{matrix} I_3^{Эm}\pi v_{p'i} N_{iЭ}^2 \\ I_3^{mЭ}\pi v_{pn} N_{im}^2 \end{matrix}\right\} = (p-p')\int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(p-p')\varphi}\int_0^a dr \left\{\begin{matrix} I_{p'}(v_{p'i} r) I_p'(v_{pn} r)\Phi(r,\varphi) \\ I_{p'}'(v_{p'i} r) I_p(v_{pn} r)\Phi(r,\varphi) \end{matrix}\right\}. \qquad (19)$$

В формулах (15) — (19) $\Phi(r, \varphi)$ может принимать значение σ'', $1-\varepsilon$ и $1 - 1/\mu$. При $\Phi(r, \varphi) = \Phi_1(\varphi)$ $I_2 \equiv 0$, а при $\Phi(r, \varphi) = \Phi_2(r)$ $I_3 \equiv 0$;

$$N_{i\text{Э}}^2 = \frac{1}{2}\left[aI'_{p'}(v_{p'i}a)\right]^2, \qquad N_{im}^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{p'^2}{v_{p'i2}}\right) I_{p'}^2 (v_{p'_i} a).$$

Коэффициенты уравнений A_{in}, $'A_{in}$ и входящие в них интегралы удовлетворяют соотношениям взаимности, которые, например, для интегралов имеют вид

$$N_{i\text{Э}}^2 \frac{v_{p'i}}{v_{pn}} I_1^{\text{Э}_i\text{Э}_n} = \left(N_{n\text{Э}}^2 \frac{v_{pn}}{v_{pi}} I_1^{\text{Э}_n\text{Э}_i}\right)^*,$$

$$N_{im}^2 \frac{v_{pn}}{v_{p'i}} I_1^{m_i m_n} = \left(N_{nm}^2 \frac{v_{p'i}}{v_{pn}} I_1^{m_n m_i}\right)^*,$$

$$N_{i\text{Э}}^2 I_2^{\text{Э}_i\text{Э}_n} - \left(N_{n\text{Э}}^2 I_2^{\text{Э}_n\text{Э}_i}\right)^* = \frac{v_{pi}^2 - v_{p_n}^2}{v_{p'i} v_{pn}} N_{i\text{Э}}^2 I_1^{\text{Э}_n\text{Э}_i} - \tag{20}$$

$$- (p' + p) \frac{v_{p'i}}{v_{pn}} N_{i\text{Э}}^2 I_3^{\text{Э}_i\text{Э}_n},$$

$$N_{im}^2 I_2^{m_i m_n} - (N_{mn}^2 I_2^{m_n m_i})^* = \frac{v_{pn}^2 v_{p'}^2}{v_{pn} v_{p'i}} N_{im}^2 I_1^{m_n m_i} -$$

$$- (p' + p) \frac{v_{pn}}{v_{p'i}} N_{im}^2 I_3^{m_i m_n},$$

$$\begin{aligned} N_{i\text{Э}}^2 I^{\text{Э}_i m_n} &= (N_{nm}^2 I_2^{m_i \text{Э}_n})^*, \\ N_{i\text{Э}}^2 I_3^{\text{Э}_i\text{Э}_n} &= -(N_{n\text{Э}}^2 I_3^{\text{Э}_n\text{Э}_i})^*, \\ N_{im}^2 I_3^{m_i m_n} &= -(N_{nm}^2 I_3^{m_n m_i})^*, \\ N_{i\text{Э}}^2 I_3^{\text{Э}_i m_n} &= (N_{nm}^2 I_3^{m_i \text{Э}_n})^*. \end{aligned} \tag{21}$$

В общем случае коэффициенты уравнений (8), (9) отличны от нуля: любая волна может взаимодействовать со всеми остальными. В некоторых частных случаях амплитуды волн могут разделиться на изолированные группы, такие, что коэффициенты уравнений (8) и (9), связывающие волны, относящиеся к разным группам, обратятся в нуль.

Если на сгусток падает волна, входящая в одну из таких групп, то сгусток будет излучать только волны, входящие в ту же группу, что должно наблюдаться при различных видах симметрии. Например, при рассеянии волн на симметричном сгустке (σ'', ε, μ не зависят от азимута φ) все $I_3 \equiv 0$, волны с различными p_i не будут связаны друг с другом. Уравнения (8), (9) в этом случае связывают друг с другом только волны с одинаковыми p. При рассеянии симметричных волн $p=0$ на таком сгустке волны магнитного типа не взаимодействуют с волнами электрического типа.

Далее методом возмущений найдем решение, ограничиваясь нулевым и первым приближением. В качестве нулевого приближения его найдем рассеяние волн на однородном теле, заполняющем все сечение волновода и имеющем резкие границы по $z (z_1=0,\ z_2=l)$. Из общих уравнений[1] (8) и (9) при помощи многих, но обычных преобразований получаем решение, выраженное для двух волн с амплитудами $f_{\pm}(z)$, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$f_+(z)\,e^{-iwz} = \frac{1}{\Delta}\{f_+(0)\,[(1+B)^2 e^{i\alpha(z-e)} - (1-B)^2 e^{i\alpha(l-z)}] - \\ - f_-(l)\,e^{-iwl}(1-B^2)(e^{i\alpha z} - e^{-i\alpha z})\}, \qquad (22)$$

$$f_-(z)\,e^{-iwz} = \frac{1}{\Delta}\{f_-(l)\,e^{-iwl}\,[(1+B)^2 e^{-i\alpha z} - (1-B)^2 e^{i\alpha z}] + \\ + f_+(0)(1-B^2)(e^{i\alpha(z-l)} - e^{i\alpha(l-z)})\},$$

$$\Delta = (1+B)^2 e^{-i\alpha l} - (1-B)^2 e^{i\alpha l},$$

где

$$\begin{Bmatrix} B \\ \alpha^2 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{c} \dfrac{w}{\alpha}\varepsilon\mu\left(1+\dfrac{4\pi i}{kc}\dfrac{\sigma}{\varepsilon}\right) \\ \left[k^2\varepsilon\mu - v^2\left(1-\dfrac{4\pi i}{kc}\mu\sigma\right)\right]\left(1+\dfrac{4\pi i}{kc}\dfrac{\sigma}{\varepsilon}\right) \end{array}\right\} & \text{для волн электрического типа} \\ \left\{\begin{array}{c} \dfrac{w}{\alpha} \\ k^2\varepsilon\mu - v^2 + k^2\dfrac{4\pi i}{kc}\sigma\mu \end{array}\right\} & \text{для волн магнитного типа} \end{array}\right]$$

При $f_+(0)=1$, $f_-(l)=0$, амплитуды $f_-(0)$, $f_+(l)$ суть коэффициенты отражения и прохождения соответственно. Выражения (22) при $f_+(0)= =1$, $f_-(l)=0$ и

$$I_1 = \delta_{v_i v_n} I_2 = I_3 \equiv 0 \qquad (23)$$

считаем нулевым приближением решения. Далее, зная это, найдем коэффициенты рассеяния для однородного сгустка, имеющего резкие границы по z и по радиусу вблизи стенок.

Добавки, отличные от нуля к интегралам (23), вызванные тем, что сгусток отстоит от стенок волновода на $\Delta a \ll a$, примут вид

$$I_{1in}^{mm} = \frac{\Delta a}{a}\,\frac{1}{\left(1-\dfrac{p^2}{a^2 v^2}\right)}, \qquad I_{2in}^{ЭЭ} = \frac{\Delta a}{a},$$

$$I_{2in}^{mm} = \frac{\Delta a}{a}. \qquad (24)$$

Поправки к коэффициентам уравнений рассеяния, связывающие амплитуды $f_{\pm}$ имеющихся волн

---

[1] Для сгустка с $\varepsilon=\varepsilon(z)$, $\mu=1$ из общих уравнений (8) и (9) получаются следствия, аналогичные результатам работ [3, 4] и др.

$$A^{ЭЭ}_{++} = A^{ЭЭ}_{--} = n^2 [I_2^{ЭЭ}(\sigma) + 2iI_2^{ЭЭ}(\varepsilon)] - ik^2 I_2^{ЭЭ}(\mu),$$
$$A^{ЭЭ}_{+-} = A^{ЭЭ}_{-+} = -w^2 I_2^{ЭЭ}(\sigma) - i(v^2 - n^2) I_2^{ЭЭ}(\mu), \tag{25}$$
$$'A^{ЭЭ}_{++} = 'A^{ЭЭ}_{+-} = -'A^{ЭЭ}_{-+} = -'A^{ЭЭ}_{--} = w I_2^{ЭЭ}(\mu),$$

и аналогично для волн магнитного типа.

Значение коэффициентов позволяет записать уравнения относительно поправок к амплитудам имеющихся волн. Проинтегрировав указанные уравнения, получим решения в виде

$$\Delta f_+(e) = \frac{i}{2w\Delta}\Big\{[A_{++}(1+B) + A_{+-}(1-B) - i'A_{++}(1+B)(\alpha - w) -$$
$$- i'A_{+-}(1-B)(\alpha + w)] + [A_{++}(1-B) + A_{+-}(1+B) +$$
$$+ i'A_{++}(1-B)(\alpha + w) + i'A_{+-}(1+B)(\alpha - w)]\,\frac{(1-B)}{\alpha + w}(e^{-iwl} - e^{i\alpha e})\Big\},$$
$$\Delta f_-(0) = \frac{i}{2w\Delta}\Big\{[A_{--}(1-B) + A_{-+}(1+B) - i'A_{--}(1-B)(\alpha + w) -$$
$$- iA_{-+}(1+B)(\alpha - w)]\,\frac{(1+B)}{\alpha + w}(e^{iwl} - e^{i\alpha l}) + [A_{--}(1+B) + \tag{26}$$
$$+ A_{-+}(1-B) + i'A_{--}(1+B)(\alpha - w) + i'A_{-+}(1-B)(\alpha + w)] \times$$
$$\times \frac{(1-B)}{\alpha - w}(e^{iwl} - e^{i\alpha l})\Big\}.$$

Амплитуды вновь возникших волн, вызванные отклонением сгустка от симметрии, находятся из уравнений

$$\frac{d}{dz}\Delta f_{i+} = -\frac{1}{2w_i}\Big\{\Big(A_{i++}f_+ - 'A_{i++}\frac{df_+}{dz}\Big)e^{i(w-w_i)z} +$$
$$+ \Big(A_{i+-}f_- - 'A_{i+-}\frac{df_-}{dz}\Big)e^{-i(w+w_i)z}\Big\},$$
$$\frac{d}{dz}\Delta f_{i-} = \frac{1}{2w_i}\Big\{\Big(A_{i--}f_- - 'A_{i--}\frac{df_-}{dz}\Big)e^{i(w-w_i)z} +$$
$$+ \Big(A_{i-+}f_+ - 'A_{i-+}\frac{df_+}{dz}\Big)e^{i(w+w_i)z}\Big\}. \tag{27}$$

Поправки к коэффициентам прохождения и отражения имеют вид

$$\Delta f_+(e) = \frac{i}{w\Delta}\Big[K_1\frac{1+B}{\alpha - w}(e^{-iwl} - e^{-i\alpha l}) + K_2\frac{1-B}{\alpha + w}(e^{-iwl} - e^{i\alpha l})\Big],$$
$$\Delta f_-(0) = \frac{i}{w\Delta}\Big[K_2\frac{1+B}{\alpha + w}(e^{iwl} - e^{-i\alpha l}) + K_1\frac{1-B}{\alpha - w}(e^{iwl} - e^{i\alpha l})\Big],$$

где для волн электрического типа

$$K_1 = Bw^2 I_2^{ЭЭ}(\sigma) + iw^2(1+B) I_2^{ЭЭ}(\varepsilon) - i(v^2 + \alpha w) I_2^{ЭЭ}(\mu),$$
$$K_2 = -Bw^2 I_2^{ЭЭ}(\sigma) + iw^2(1-B) I_2^{ЭЭ}(\varepsilon) - i(v^2 - \alpha w) I_2^{ЭЭ}(\mu), \tag{28}$$

для волн магнитного типа

$$K_1 = K_2 = k^2[I_1^{mm}(\sigma) + I_2^{mm}(\sigma) + iI_1^{mm}(\varepsilon) + iI_2^{mm}(\varepsilon) - iI_1^{mm}(\mu)] - iw^2 I_2^{mm}(\mu).$$

Энергетические характеристики взаимодействия (сила, поглощаемая энергия и т. д.) определяются в этом приближении величинами $f_+(l) \pm \pm \Delta f_+(l)$, $f_-(0) \pm \Delta f_-(0)$.

Формулы для силы взаимодействия волны с движущимся телом и энергия в единицу времени, получаемая сгустком от волны, имеют вид

$$cF_z = S_z\gamma^2\left(1 - \frac{\beta}{\beta_{rp}}\right)\left|1 - \frac{\beta}{\beta_{rp}}\right|\{1 - [f_+(l) \pm \Delta f_+(l)]^2 + [f_-(0) \pm \Delta f_-(0)]^2\},$$

$$\frac{dE}{dt} = S_z\gamma^2\left|1 - \frac{\beta}{\beta_{rp}}\right|(1 - \beta\beta_{rp})\{1 - [f_+(l) \pm \Delta f_+(l)]^2 - [f_-(0) \pm \Delta f_-(0)]^2\}. \tag{29}$$

Здесь $\gamma^2 = (1-\beta^2)^{-1}$, S_z — поток энергии волны вдоль оси z, β, β_{rp} — скорости тела и волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векслер В. И., Саранцев В. П. и др. Препринт ОИЯИ, 9—3440—2, 1968.
2. Векслер В. И. «Атомная энергия», **5**, 427, 1957.
3. Бреховских Л. М. Волны в сложных средах. М., 1957.
4. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., 1967.

Поступила в редакцию
11.4 1972 г.

Кафедра
физики элементарных частиц