Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1974.

УДК 534.25

В. В. ШЕГАЙ

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ДВУХСЛОЙНОГО СОГЛАСОВАНИЯ

Рассмотрена задача о конструировании двухслойной согласующейся системы для двух полупространств, отделенных от согласующих слоев реактивными четырехполюсниками. Показано, в каких случаях согласование возможно. Результаты могут быть использованы при расчетах согласующих систем с числом слоев, большим двух, и для согласования двух комплексных импедансов.

Настоящая работа посвящена исследованию согласующих систем, построенных из однородных плоскопараллельных слоев. Конструкции такого рода широко применяются в оптике и в акустике для «просветления» плоских поверхностей, разработки интерференционных фильтров и других целей [1, 2].

Синтез слоистых систем можно рассматривать с той же точки зрения, что и конструирование согласующих ступенчатых линий и волноводов в электродинамике [3]. Соответственно полученные результаты могут быть использованы не только для синтеза оптических или акустических слоистых систем, но и для конструирования согласующих волноводов в электродинамике и в акустике. Чтобы сделать общность рассматриваемых вопросов более наглядной, воспользуемся теорией линейных пассивных четырехполюсников, причем для определенности будем пользоваться акустическими терминами.

Напомним, что давление p_2 и колебательная скорость v_2 на выходе акустического четырехполюсника выражаются через давление p_1 и колебательную скорость v_1 на входе с помощью характеристической матрицы $\|b\|$ четырехполюсника [3]:

$$\left\| \begin{matrix} p_2 \\ v_2 \end{matrix} \right\| = \| b \| x \left\| \begin{matrix} p_1 \\ v_1 \end{matrix} \right\|. \tag{1}$$

Рассмотрим задачу двухслойного согласования двух полубесконечных сред, отделенных от согласующей системы реактивными четырехполюсниками (рис. 1). Под согласованием понимается создание условий для полного прохождения волны из одной среды в другую. Считаем, что поглощение энергии в слоях и в средах отсутствует. Это означает, что соответствующие волновые сопротивления и волновые числа являются действительными величинами.

Поскольку любой физически реализуемый комплексный импеданс можно представить в виде входного импеданса реактивного четырехполюсника, замкнутого на действительное сопротивление [4], такая система дает возможность решать задачу согласования двух комплексных импедансов. Кроме того, представив реактивный четырехполюсник в виде совокупности нескольких непоглощающих плоских слоев, мы можем рассматривать согласующие системы с произвольным числом слоев.

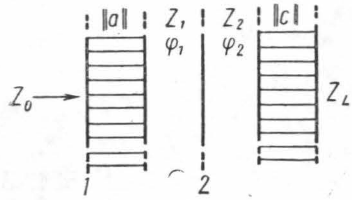

Рис. 1

Пусть плоская гармоническая волна падает, как показано на рис. 1 стрелкой, нормально из полубесконечной среды с волновым сопротивлением z_0 на плоскую границу 1 некоторой конструкции, которую представим в виде реактивного четырехполюсника с характеристической матрицей $\|a\|$. За этой конструкцией следуют два однородных плоских слоя, которые будем характеризовать волновыми сопротивлениями z_i и волновыми толщинами $\varphi_i = \frac{\omega l_i}{c_i}$ $(i=1, 2)$. Здесь l_i и c_i — толщина и скорость распространения волны для i-го слоя соответственно. Между вторым слоем и полубесконечной средой с волновым сопротивлением z_l находится еще одна промежуточная конструкция, которую будем рассматривать как реактивный четырехполюсник с матрицей $\|c\|$. Волновые сопротивления z_0, z_l и элементы матриц $\|a\|$, $\|c\|$ считаем заданными величинами.

Характеристические матрицы $\|a\|$ и $\|c\|$ реактивных четырехполюсников запишем в виде

$$\|a\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & ja_{12} \\ ja_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}, \quad \|c\| = \begin{Vmatrix} c_{11} & jc_{12} \\ jc_{21} & c_{22} \end{Vmatrix},$$

где a_{ik} и c_{ik} $(i, k=1, 2)$ — действительные величины. Матрица однородного непоглощающего плоского слоя имеет вид [3]

$$\|d\| = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -jz\sin\varphi \\ -j\frac{1}{z}\sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

где z — волновое сопротивление, а φ — волновая толщина слоя.

В соответствии с поставленной задачей будем искать значения параметров согласующих слоев z_i, φ_i $(i=1, 2)$, при которых отражение волны от границы 1 отсутствует.

Коэффициент отражения V плоской волны, падающей нормально из среды с волновым сопротивлением z_0 на плоскую границу 1 с входным импедансом $z_{\text{вх}}^{(1)}$, равен [1]

$$V = \frac{z_{\text{вх}}^{(1)} - z_0}{z_{\text{вх}}^{(1)} + z_0}. \tag{3}$$

Представим первый слой и прилегающий к нему четырехполюсник с матрицей $\|a\|$ в виде обобщенного четырехполюсника с матрицей $\|b^{(1)}\|$, которая с учетом направления распространения волны вычисляется по формуле

$$\|b^{(1)}\| = \|d^{(1)}\| x \|a\|, \tag{4}$$

где $\|d^{(1)}\|$ есть характеристическая матрица первого слоя. Входной импеданс $z_{\text{вх}}^{(1)}$ границы 1 можно рассматривать как входной импеданс реактивного четырехполюсника с матрицей $\|b^{(1)}\|$, замкнутого на сопротивление $z_{\text{вх}}^{(2)}$, где $z_{\text{вх}}^{(2)} = R + jx$ есть входной импеданс границы 2, и тогда

$$z_{\text{вх}}^{(1)} = \frac{b_{22}^{(1)} z_{\text{вх}}^{(2)} - jb_{12}^{(1)}}{-jb_{21}^{(1)} z_{\text{вх}}^{(2)} + b_{11}^{(1)}}. \tag{5}$$

Подставим это выражение в формулу (3) и приравняем коэффициент отражения V нулю. Получим уравнение

$$b_{22}^{(1)} z_{\text{вх}}^{(2)} - jb_{12}^{(1)} - z_0 (-jb_{21}^{(1)} z_{\text{вх}}^{(2)} + b_{11}^{(1)}) = 0. \tag{6}$$

Разделив действительную и мнимую части этого уравнения, приходим к системе уравнений относительно z_1 и φ_1:

$$\begin{gathered}
\left(a_{22}\cos\varphi_1 + \frac{a_{12}}{z_1}\sin\varphi_1\right) R - z_0 x \left(a_{21}\cos\varphi_1 - \frac{a_{11}}{z_1}\sin\varphi_1\right) - \\
- z_0 (a_{11}\cos\varphi_1 + a_{21} z_1 \sin\varphi_1) = 0, \\
\left(a_{22}\cos\varphi_1 + \frac{a_{12}}{z_1}\sin\varphi_1\right) x - (a_{12}\cos\varphi_1 - a_{22} z_1 \sin\varphi_1) + \\
+ z_0 R \left(a_{21}\cos\varphi_1 - \frac{a_{11}}{z_1}\sin\varphi_1\right) = 0.
\end{gathered} \tag{7}$$

Будем считать, что полуволновые слои не используются, поскольку их характеристическая матрица является единичной. Поэтому $\varphi_1 \neq n\pi$, $n=0, 1, 2, \ldots$, и решение системы (7) можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered}
z_1^2 = \frac{z_0 (R^2 + x^2) - R (z_0^2 a_{11}^2 + a_{12}^2)}{R (z_0^2 a_{21}^2 + a_{22}^2) - z_0}, \\
\operatorname{ctg}\varphi_1 = \frac{a_{12} R/z_1 - a_{21} z_0 z_1 + a_{11} x\, z_0/z_1}{a_{11} z_0 - a_{22} R + a_{21} x z_0}.
\end{gathered} \tag{8}$$

В свою очередь входной импеданс $z_{\text{вх}}^{(2)}$ можно представить как входной импеданс четырехполюсника с матрицей $\|b^{(2)}\|$, замкнутого на сопротивление z_L, откуда

$$z_{\text{вх}}^{(2)} = \frac{b_{22}^{(2)} z_L - jb_{12}^{(2)}}{-ib_{21}^{(2)} z_L + b_{11}^{(2)}}$$

или

$$z_{\text{вх}}^{(2)} (-jb_{21}^{(2)} z_L + b_{11}^{(2)}) - b_{22}^{(2)} z_L + jb_{12}^{(2)} = 0, \tag{9}$$

где $\| b^{(2)} \| = \| c \| x \| d^{(2)} \|$.

Решение уравнения (9) имеет тот же вид, что и решение уравнения (6). Считая, что и здесь $\varphi \neq n\pi$, $n=0, 1, 2, \ldots$, получим

$$\begin{gathered}
z_2^2 = \frac{z_L (R^2 + x^2) - R (z_L^2 c_{22}^2 + c_{12}^2)}{R (z_L^2 c_{21}^2 + c_{11}^2) - z_L}, \\
\operatorname{ctg}\varphi_2 = \frac{-c_{12} R/z_2 + c_{21} z_2 z_L + c_{22} x\, z_L/z_2}{c_{11} R - c_{22} z_L + c_{21} x z_L}.
\end{gathered} \tag{10}$$

Соотношения (8), (10) определяют значения параметров z_i, $\varphi_i (i=1, 2)$ согласующих слоев, как функции элементов матриц $\|a\|$, $\|c\|$, волновых сопротивлений z_0, z_L и параметров R, x, где R и x имеют смысл действительной и мнимой частей входного импеданса промежуточной границы 2. Поскольку волновые сопротивления согласующих слоев z_1 и z_2 должны быть действительными величинами, то область допустимых значений параметров R и x определяется системой неравенств

$$\begin{aligned} &z_1^2 > 0 \\ &z_2^2 > 0\,, \end{aligned} \tag{11}$$

в которой z_1^2 и z_2^2 определяются формулами (8) и (10).

Рассмотрим сначала неравенство

$$z_1^2 = \frac{z_0 (R^2 + x^2) - R (z_0^2 a_{11}^2 + a_{12}^2)}{R (z_0^2 a_{21}^2 + a_{22}^2) - z_0} > 0. \tag{12}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{z_0^2 a_{11}^2 + a_{12}^2}{2z_0}, \\ R_2 &= \frac{z_0}{z_0^2 a_{21}^2 + a_{22}^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Поскольку все величины, входящие в правые части равенств (13), действительны, а волновое сопротивление $z_0 > 0$, то $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$.

Перепишем неравенство (12) с учетом (13) в виде

$$z_1^2 = \frac{(R - R_1)^2 + x^2 - R_1^2}{\dfrac{R}{R_1} - 1} > 0. \tag{14}$$

В зависимости от соотношений между величинами a_{ik} $(i, k=1, 2)$ и z_0 возможны два случая: $R_1 \leqslant R_2$ и $R \geqslant R_2$. Если $R_1 \leqslant R_2$, то решение неравенства (14) имеет вид (см. рис. 2)

$$\begin{gathered} 0 \leqslant x^2 \leqslant R_1^2, \\ R_1 - \sqrt{R_1^2 - x^2} < R < \min\{R_1 + \sqrt{R_1^2 - x^2};\ R_2\}, \quad x^2 \geqslant R_1^2, \\ R > \max\{R_1 + \sqrt{R_1^2 - x^2};\ R_2\},\ R > R_2, \end{gathered} \tag{15}$$

а если $R_1 \geqslant R_2$, то

$$\begin{gathered} 0 \leqslant x^2 \leqslant R_1^2, \\ R_1 - \sqrt{R_1^2 - x^2} < R < R_2, \\ R > R_1 + \sqrt{R_1^2 - x^2},\ x^2 \geqslant R_1^2, \\ R_2 < R < R_1 - \sqrt{R_1 - x^2},\ R > R_2 \end{gathered} \tag{16}$$

(см. рис. 3).

Заштрихованные области на рис. 2 и 3 соответствуют тем значениям R и x, при которых выполняется неравенство (12). Аналогичные области можно построить и для неравенства $z_2^2 > 0$. При этом в выраженяих (12), (13) следует a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, z_0 заменить на c_{22}, c_{12}, c_{21}, c_{11}, z_L соответственно. Построив области либо типа рис. 2, либо типа

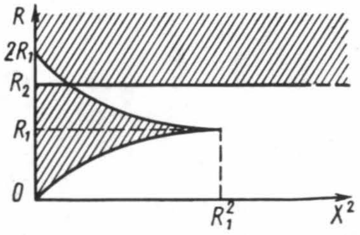

Рис. 2

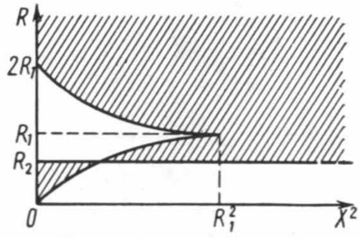

Рис. 3

рис. 3 для неравенств $z_1^2 > 0$, $z_2^2 > 0$, можно получить графическое решение системы неравенств (11). Из (15) и (16) видно, что решение системы (11) всегда существует. Например, достаточно следующим образом выбрать область определения R и x:

$$
\begin{aligned}
x^2 &\geqslant \max\{R_1^2(a_{ik}, z_0);\ R_1^2(c_{ik};\ z_L)\}, \\
R &> \max\{R_2(a_{ik}, z_0);\ R_2(c_{ik}, z_L)\},
\end{aligned}
\tag{17}
$$

чтобы система неравенств (11) была справедлива при любых значениях заданных величин a_{ik}, $c_{ik}(i, k=1, 2)$, z_0, z_L.

Выбирая любую пару значений R и x, удовлетворяющих системе неравенств (11), по формулам (8), (10) находим волновые сопротивления z_1, z_2 и волновые толщины φ_1, φ_2 согласующих слоев. Таким образом, рассмотренное двухслойное согласование оказывается всегда возможным потому, что всегда можно определить параметры φ_1, φ_2, $z_1 > 0$, $z_2 > 0$ согласующих слоев, обеспечивающих нуль коэффициента отражения волны от входной плоскости системы.

В заключение выражаю глубокую благодарность К. В. Чернышеву за большую помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., 1957.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1970.
3. Бриллюэн Л., Паради М. Распространение волн в периодических структурах. М., 1959.
4. Фано Р. Теоретические ограничения полосы согласования произвольных импедансов. М., 1965.

Поступила в редакцию
8.6 1972 г.

Кафедра
акустики