Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1974.

УДК 539.12.01

В. К. БЕЛОВ

О СВЯЗИ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КВАЗИПОТЕНЦИАЛА И ОБОБЩЕННОЙ МАТРИЦЫ РЕАКЦИЙ

Уравнение, связывающее квазипотенциал V и обобщенную матрицу реакций U, является уравнением сингулярного типа. В статье показывается, как можно упростить и решить это уравнение методом Фредгольма. Из решения этого уравнения получена некоторая информация о связи аналитических свойств квазипотенциала V- и U-матрицы.

Введение

В последнее время появились два направления работ, в которых были разработаны методы исследования аналитических свойств парциальной амплитуды и ее асимптотики без использования гипотезы о представлении Мандельстама.

К первому направлению отнесем работы, связанные с квазипотенциальным подходом в релятивистской задаче рассеяния. Основы этого подхода, изложенные в начальных работах [1, 2], состоят в том, что задачи рассеяния и задачи связанных состояний двух частиц можно описывать с помощью уравнения типа уравнения Шредингера с обобщенным комплексным потенциалом $V(\bar{p}, \bar{q}; k^2)$, зависящим от энергии

$$(k^2 - p^2)\, \Phi_{\bar{k}}(\bar{p}) - \frac{1}{\sqrt{p^2 + m^2}} \int_0^\infty V(\bar{p}, \bar{q}; k^2)\, \Phi_{\bar{k}}(\bar{q}) = 0. \qquad (1)$$

Обычно исследуется уравнение, получаемое из (1), с помощью соотношения

$$\Phi_{\bar{k}}(\bar{p}) = \delta(\bar{p} - \bar{k}) + \frac{T(\bar{p}, \bar{k})}{(k^2 - p^2 + i0)\sqrt{p^2 + m^2}}, \qquad (2)$$

где $T(p, k)$ — инвариантная амплитуда рассеяния.

Подставив (2) в (1), получим

$$T(\bar{p}, \bar{q}) = V(\bar{p}, \bar{q}; k^2) + \int_0^\infty \frac{dp'}{\sqrt{p'^2 + m^2}} \, \frac{V(\bar{p}, \bar{p}'; k^2)\, T(\bar{p}', \bar{q})}{k^2 - p'^2 + i0}. \qquad (3)$$

Уравнение (3) является уравнением Фредгольма второго рода, и его можно исследовать соответствующим образом [3].

Обобщенный комплексный потенциал $V(\bar{p}, \bar{p}^1, k^2)$ — очень сложная функция своих аргументов. Однако [2] его можно представить в более простом виде, и при этом на «энергетической поверхности» $p^2=m^2$ уравнение (3) будет давать те же значения амплитуды рассеяния, что и более сложные квазипотенциалы. Поэтому обычно для расчетов предполагается, что квазипотенциал может быть представлен в виде

$$V((\bar{p}-\bar{q})^2, k^2) = \int_{\mu^2}^{\infty} d\nu \frac{\widetilde{V}(\nu, k^2)}{\nu^2+(\bar{p}-\bar{q})^2}, \tag{4}$$

где

$$\int_{\mu^2}^{\infty} d\nu \widetilde{V}(\nu, k^2)\nu^{\rho} < \infty \quad \text{при } -1 \leqslant \rho \leqslant 0. \tag{5}$$

Еще предполагаем, что $V(\nu, k^2)$ аналитична в k-плоскости, за исключением точек ветвления, и вещественна на интервале действительной оси, содержащей точку $k^2=0$. При этих предположениях на примере уравнения (3) и были изучены [3] аналитические свойства амплитуды рассеяния как функции комплексных переменных энергии и орбитального момента.

Ко второму направлению отнесем недавнюю работу [4], где было предложено уравнение, являющееся релятивистским обобщением основного уравнения теории затухания. Уравнение записано в рамках одновременного подхода и описания двухчастичных состояний для квантовой теории поля:

$$F(\bar{p}, \bar{q}) = U(\bar{p}, \bar{q}) + \frac{i\pi}{\sqrt{p^2+m^2}} \int d\Omega_k U(\bar{p}, \bar{k}) F(\bar{k}, \bar{q}), \tag{6}$$

где F — инвариантная амплитуда упругого рассеяния, U представляет собой обобщение обычной матрицы реакции квантовой механики и является неэрмитовой, поскольку учитывает неупругие промежуточные состояния.

Уравнение (6) для парциальных амплитуд сведется к обычному алгебраическому соотношению [5]. Для решения уравнения (6) необходимо только знать U-матрицу на энергетической поверхности, и вопросы, связанные с экстраполяцией за энергетическую поверхность, отпадают.

Исследование уравнения (6) проводилось в работе [5] в предположении, что матрица U может быть представлена в виде

$$U(\bar{p}, \bar{q}) = \int_{\mu_0^2}^{\infty} d\nu \frac{\widetilde{U}(\nu, p^2)}{\nu+(\bar{p}-\bar{q})^2}; \quad |\bar{q}| = |\bar{p}| \tag{7}$$

с учетом, что $\widetilde{U}(\nu p^2)$ аналитична в p^2-плоскости, за исключением точек ветвления, и вещественна на интервале, содержащем точку $p^2=0$.

Из уравнений (3) и (6) следует, что квазипотенциал $V(\bar{p}, \bar{q}; k^2)$ и матрица $U(\bar{p}, \bar{q})$ связаны следующим образом:

$$U(\bar{p}, \bar{k}) = V(\bar{p}, \bar{k}; k^2) + P\int \frac{dp'}{\sqrt{p'^2 + m^2}} \frac{V(\bar{p}, \bar{p}'; k^2)\, U(\bar{p}', \bar{k})}{k^2 - p^2}. \tag{8}$$

В данной работе обсудим свойство такого представления.

Решение уравнения, связывающего квазипотенциал V и обобщенную матрицу реакций U

Разложив квазипотенциал $V(\bar{p}, \bar{q}; k^2)$ и матрицу $U(\bar{p}, \bar{q})$ по парциальным волнам:

$$U(\bar{p}, \bar{q}) = \frac{1}{2pq} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, u_l(p, q)\, P_l\left(\frac{\bar{p}\,\bar{p}}{pq}\right), \tag{9}$$

$$V(\bar{p}, \bar{q}; k^2) = \frac{1}{2pq} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, v_l(p, q; k^2)\, P_l\left(\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{pq}\right) \tag{10}$$

и воспользовавшись соотношением

$$\int d\,\Omega_q P_l\left(\frac{\bar{p}\,\bar{p}'}{pp'}\right) P_{l'}\left(\frac{\bar{p}'\,\bar{q}}{p'q}\right) = \delta_{ll'} \frac{4\pi}{2l+1} P_l\left(\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{pq}\right), \tag{11}$$

получим уравнение для парциальных матриц

$$u_l(p, k) = v_l(p, k; k^2) + P\int_0^{\infty} \frac{2\pi\, v_l(p, p'; k^2)\, u_l(p', k)}{\sqrt{p'^2 + m^2}\,(k^2 - p'^2)}. \tag{12}$$

Уравнение (12) является уравнением сингулярного типа. Однако его можно свести к уравнению типа Фредгольма [6, 7]. Для этого положим в (12) $p=k$ и из полученного уравнения и уравнения (12) найдем

$$u_l(p, k) = \tau_l(p, k; k^2)\, u_l(k, k) + \int_0^{\infty} dp'\, \Lambda_l(p, p'; k^2)\, u_l(p', k), \tag{13}$$

где

$$\tau_l(p, k; k^2) = v_l(p, k; k^2)\, v_l^{-1}(k, k; k^2), \tag{14}$$

$$\Lambda_l(p, p'; k_2) = \frac{2\pi}{\sqrt{p'^2 + m^2}\,(k^2 - p^2)} [v_l(p, p'; k^2) -$$

$$- \tau_l(p, k; k^2)\, v_l(k, p'; k^2)]. \tag{15}$$

Легко заметить, что

$$\Lambda_l(p, p'; k^2)|_{p=p'} = 0; \quad (p^2 - p'^2)\, \Lambda_l(p, p'; k^2)|_{p=p'} = 0. \tag{16}$$

Для того чтобы использовать при решении (13) метод последовательных приближений, допустим, что

$$\int [v_l(p, p'; k^2) - \tau_l(p, k; k^2)\, v_l(k, p'; k^2)]\, \rho(p')\, dp' < \infty, \tag{17}$$

где

$$\rho(p') = 2\pi (p'^2 + m^2)^{-1/2} (k^2 - p'^2)^{-1}. \tag{18}$$

Решение (13) ищем методом последовательных приближений, вводя понятие повторных ядер, которые определяются по формулам

$$\Lambda_l^{(1)}(p, p'; k^2) = \Lambda_l(p, p'; k^2),$$

$$\Lambda_l^{(n)}(p, p'; k^2) = \int_0^\infty \Lambda_l^{(n-1)}(p, p''; k^2)\, \Lambda_l(p'', p'; k^2)\, dp'' \quad \text{при } n > 1. \tag{19}$$

Заметим, что

$$|\Lambda_l^{(n)}(p, p'; k^2)| < \infty \quad \text{при любом } n. \tag{20}$$

Тогда решение уравнения (13) будет иметь вид

$$f_l(p, k) = \tau_l(p, k; k^2) + \int_0^\infty dp'\, R_l(p, p'; k^2)\, \tau_l(p', k; k^2), \tag{21}$$

где

$$f_l(p, k) = u_l(p, k)\, u_l^{-1}(k, k). \tag{22}$$

$$R_l(p, p'; k^2) = \Lambda_l^{(1)}(p, p'; k^2) + \ldots\ldots + \Lambda_l^{(n)}(p, p'; k^2) \tag{23}$$

есть резольвента ядра Λ_l, и она удовлетворяет интегральному уравнению

$$R_l(p, p'; k^2) = \Lambda_l(p, p'; k^2) + \int_0^\infty \Lambda_l(p, p''; k^2)\, R_l(p'', p'; k^2)\, dp''. \tag{24}$$

Как следствие свойств (16) ядра уравнения Λ получим, что

$$R_l(p, p'; k^2)|_{p=p'} = 0; \quad (p^2 - p'^2)\, R_l(p, p'; k^2)|_{p=p'} = 0. \tag{25}$$

Исследование решения уравнения, связывающего квазипотенциал V и обобщенную матрицу U

Для исследования аналитических свойств u_l как функции орбитального момента используем неравенство (17), которое необходимо для решения уравнения (13). Аналитические свойства квазипотенциала (4) и (5) считаем заданными.

Используя формулу

$$\frac{1}{\nu + (\bar{p} - \bar{q})^2} = \frac{1}{2pq} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, Q_l\left(\frac{p^2 + q^2 + \nu}{2pq}\right) P_l\left(\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{pq}\right), \tag{26}$$

получим для v_l представление

$$v_l(p, q; k^2) = \int_{\mu^2}^{\infty} d\nu\, \widetilde{V}(\nu, k^2)\, Q_l\left(\frac{p^2 + q^2 + \nu}{2pq}\right). \tag{27}$$

В точках $p = p'$ неравенство выполняется в силу (16). При $p \neq p'$ оценим каждый отдельный член в (17), воспользовавшись (27) и асимптотической функцией Лежандра

$$Q(z) \sim z^{-l-1} \quad \text{при } |z| \to \infty. \tag{28}$$

Каждый член в неравенстве (17) согласно (5) ограничен при $R_l l > -1 - \rho$, если k^2 лежит в плоскости k^2, за исключением разреза

$k^2 \geqslant 0$. Далее заметим, что Q_l — аналитическая функция l, за исключением точек $l=-1, -2, ..$, так как в этих точках она имеет простые полюса. Все эти рассуждения можно отнести и к неравенству (20), а следовательно, и к резольвенте R_l. То есть R_l — мероморфная функция во всей области k^2, за исключением разреза $k^2 \geqslant 0$. Следовательно, $f_l(p, k)$ имеет те же точки ветвления по l, что и $\tau_l(p, k)$, плюс выше описанные точки ветвления.

Заметим, что k^2 входит в уравнение (13) и его решение (21) не как переменная, а как некий параметр. Это значительно упрощает исследования в k^2 плоскости.

Для исследования аналитических свойств u_l как функции от параметра k^2 удобно представить резольвенту R_l в виде отношения рядов Фредгольма:

$$R_l(p, p'; k^2) = N_l(p, p'; k^2)/D_l(k^2). \tag{29}$$

Здесь

$$D_l(k^2) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} d_n(k^2), \tag{30}$$

$$d_n(k^2) = \prod_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} dp_i \frac{2\pi}{\sqrt{p_i^2+m^2}\,(k^2-p_i^2)} \Lambda_l \begin{pmatrix} p_1 \ldots p_n \\ p_1 \ldots p_n \end{pmatrix} \tag{31}$$

и

$$N_l(p, p'; k^2) = \Lambda(p, p'; k^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} d_n(p, p'; k^2), \tag{32}$$

$$d_n(p, p'; k^2) = \prod_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} dp_i \frac{2\pi}{\sqrt{p_i^2+m^2}\,(k^2-p_i^2)} \Lambda_l \begin{pmatrix} p, p_1 \ldots p_n \\ p, p_1 \ldots p_n \end{pmatrix}. \tag{33}$$

В формулах (31) и (33) для удобства введено обозначение

$$\Lambda_l \begin{pmatrix} p_1, \ldots p_n \\ p_1, \ldots p_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \Lambda_l(p_1, p_1) & \ldots\ldots & \Lambda_l(p_1, p_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \Lambda_l(p_n, p_1) & \ldots\ldots & \Lambda_l(p_n, p_n) \end{vmatrix}. \tag{34}$$

Числитель резольвенты N_l не имеет особенностей, поскольку при $p=p'$ (когда $k^2=p^2$) определитель $\Lambda_l \begin{pmatrix} p, p_1 \ldots p_n \\ p, p_1 \ldots p_n \end{pmatrix}$ равен нулю, т. е.

$$N_l(p, p'; k^2)\,|_{p=p'=p_i} = 0 \text{ при } 0 \leqslant k^2 < p_i^2. \tag{35}$$

Значит, если у R_l есть особенности, то они появятся только как следствие нулей знаменателя $D_l(k^2)$. Заметим, что $D_l(k^2)$ имеет в k^2-плоскости разрез при $k^2>0$, $Im k^2=0$. Это означает, что резольвента аналитична во всей плоскости k^2, за исключением выше упомянутого разреза. Итак, $f_l(p, k)$ имеет все те же особенности в k^2-плоскости, что и $\tau_l(p, k; k^2)$, и аналитична во всей k^2-плоскости, за исключением разреза $k^2>0$, $Im\, k^2=0$ при $0 \leqslant k^2 < p^2$. При $k=p$ получаем результат, сводящийся к (25).

Матрица $u_l(p, k)$ неэрмитова, что видно из решения (21). Действительно:

$$\frac{u_l(p,q)-u_l^+(p,q)}{u_l(q,q)}=\frac{1}{v_l(q,q)}\Big\{[v_l(p,q;k^2)-v_l^+(p,q;k^2)]+$$

$$+\int[R_l(p,p';k^2)\,v_l(p',q;k^2)-v_l^+(q,p';k^2)\,R_l^+(p',p;k^2)]\,dp'\Big\}. \qquad (36)$$

На энергетической поверхности $|p|=|q|$ это выражение примет вид

$$\frac{1}{u_l(q,q)}[u_l(p,q)-u_l(p,q])_{p^2=q^2}=\frac{1}{v_l(q,q)}\Big\{2iH(p,q)+$$

$$+\frac{1}{v_l(q,q)}\int dp'\,\frac{1}{\sqrt{p'^2+m^2}\,(p^2-p'^2)}[v_l(p,p';k^2)\,v_l(p',q;k^2)-$$

$$-v_l^+(q,p';k^2)\,v_l^+(p',p;k^2)]+\ldots\Big\}_{p^2=q^2}, \qquad (37)$$

где использовано свойство квазипотенциала, что

$$v_l(p,q;k^2)-v_l(p,q;k^2)\,|_{p^2=q^2=k^2}=2iH(p,q), \qquad (38)$$

где $H(p,q)$ — вклад неупругих каналов реакции.

Теперь рассмотрим аналитические свойства f_l в k-плоскости. Уже было выяснено, что функция R_l не имеет особенностей при $0\leqslant k^2\leqslant p_i^2$, т. е. в области — $p_i<k<p_i$. Из формул (33), (32), (15) и (27) следует, что особенности R_l могут появиться только из-за особых точек $Q_l\left(\frac{k^2+q_i^2+\nu}{2kq_i}\right)$ и из-за особенностей $V(\nu,k^2)$. Особенности $V(\nu,k^2)$ описаны во введении, а особые точки $Q_l: z=\infty$, $z=\pm1$ исследуем сейчас поподробнее. Первую особенность можно легко выделить, разделив Q_l на $(kq)^{l+1}$, и при $k=0$ особенностей не будет. Особенностей при $z=\pm1$ можно тоже избежать, повернув контуры интегрирования [3]. Поэтому можно осуществить аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость, исключая разрезы квазипотенциала.

Все точки ветвления будут лежать на мнимой оси; $\sigma\pm i\mu/2$ из-за членов $Q_l(1+\nu/2k^2)$, $\pm i\mu$ из-за произведения $Q_l\cdot Q_l$ и $\pm im$ — из-за множителя $(p'^2+m^2)^{-\frac{1}{2}}$; а также точки $\pm i(\mu\pm m)$ и т. п.

Итак, $f_l(p,k)$ в комплексной плоскости k имеет все те же особенности, что и $\tau_l(p,k;k^2)$, плюс разрезы и точки ветвления.

Как видно из полученных результатов, связь аналитических свойств обобщенной матрицы реакций U и квазипотенциала V более сложна, чем связь между амплитудой рассеяния T и U или T и V. Как видим, уравнение (8) значительно сложнее уравнения (3) и уж, конечно, уравнения (6). Несмотря на трудности решения уравнения (8), данное исследование дает некоторую информацию о связи квазипотенциального подхода и обобщенной релятивистской теории затухания.

Автор благодарен В. И. Саврину, Н. Е. Тюрину и О. А. Хрусталеву за помощь в написании статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. Preprint JINR, E-1145, 1962; Nuovo Cim., **29**, 380, 1963.

2. Logunov A. A., Tovkhelidze A. N., Todorov I. T., Khrustalev O. A. Nuovo Cim., **30**, 134, 1963.
3. Арбузов Б. А., Логунов А. А., Филиппов А. Т., Хрусталев О. А. Препринт ОИЯИ Р-1318, Дубна, 1963; ЖЭТФ, **46**, 1266, 1964.
4. Логунов А. А., Саврин В. И., Тюрин Н. Е., Хрусталев О. А. ТМФ, **6**, 1971.
5. Белов В. К., Саврин В. И., Тюрин Н. Е. Препринт ИФВЭ, СТФ-71—119, 1971.
6. Pierre H. Noyes, Phys. Rev. Lett., **15**, 538, 1965.
7. Kowalski K. L. Phys. Rev. Lett., **15**, 798, 1965.

Поступила в редакцию
29.6 1972 г.

Кафедра
квантовой статистики