Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1974.

УДК 539.12.01

А. В. БОРИСОВ, Ю. Г. ПАВЛЕНКО

РАССЕЯНИЕ МЯГКИХ ФОТОНОВ НА ЭЛЕКТРОНАХ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Показано, что сечение рассеяния мягких фотонов с отличной от нуля проекцией вектора поляризации на направление магнитного поля, вычисленное по теории возмущений, обладает инфракрасной расходимостью $\sim\omega^3$. Эта расходимость устраняется в теории, точно учитывающей падающую волну как внешнее поле. Рассмотрение проведено в нерелятивистском случае.

В пределе малых частот амплитуда рассеяния фотона на неподвижной заряженной частице не зависит от частоты фотона ω. Сечение рассеяния в этом случае определяется классической формулой Томсона. Рассеяние электромагнитных волн зарядами, находящимися в магнитном поле, существенно отличается от рассеяния на свободных зарядах. Именно благодаря наличию дискретных уровней энергии рассеяние может быть как когерентным, так и некогерентным. При этом оказывается, что сечение некогерентного рассеяния обладает инфракрасной расходимостью. Таким образом, при достаточно малой частоте падающей волны теория возмущений оказывается неприменимой. Для устранения указанной расходимости удобно воспользоваться теорией, учитывающей падающую волну как внешнее поле.

Матричный элемент рассеяния фотона электроном в нерелятивистском приближении[1] имеет вид [1]

$$M_{fi} = r_0 \left\{ \frac{1}{m} \sum_n \left[\frac{(\mathbf{A}^{*\prime}\, \mathbf{p})_{fn}\, (\mathbf{A}\mathbf{p})_{ni}}{\omega-\omega_{ni}} - \frac{(\mathbf{A}\mathbf{p})_{fn}\, (\mathbf{A}^{*\prime}\, \mathbf{p})_{ni}}{\omega'+\omega_{nf}} \right] + (\mathbf{A}^{*\prime}\mathbf{A})_{fi} \right\}. \qquad (1)$$

Здесь $\omega, \mathbf{k}, \mathbf{A}=\sqrt{4\pi}\,\mathbf{e}e^{-i(\omega t-\mathbf{kr})}$ — энергия, импульс и вектор-потенциал падающего фотона, те же величины, отмеченные штрихами, относятся к рассеянному фотону; r_0 — классический радиус электрона, $\mathbf{p}=-i\nabla-e\mathbf{A}_0$ — оператор кинетического импульса, $\mathbf{A}_0=(-yH,\ 0,\ 0)$ — вектор-потенциал магнитного поля H. Выражение для энергии

$$\varepsilon_{np_z} = \frac{p_z^2}{2m} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0, \quad \omega_0 = \frac{eH}{m} \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

[1] Используется система единиц $\hbar=c=1$.

и волновая функция электрона в магнитном поле хорошо известны [2]. Учитывая, что $\omega \ll \sqrt{m\omega_0}$, найдем матричные элементы, входящие в (1):

$$(\mathbf{Ap})_{n'n} = \sqrt{4\pi}\,[e_z p_z \delta_{n'n} - i\sqrt{m\omega_0}\,(e_+\sqrt{n}\,\delta_{n',n-1} - e_-\sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1})],$$

$$e_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x \pm ie_y). \tag{2}$$

Воспользовавшись (2), из (1) получим, положив $p_{zi}=0$ и опуская члены порядка ω/m,

$$M_{fi} = 4\pi r_0 \left\{ \left[\frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} (\omega_0 \mathbf{e}_\perp \mathbf{e}'_\perp + i\omega[\mathbf{ee}']_z) + \mathbf{ee}' \right] \delta_{n_f n_i} + \right.$$

$$+ i\sqrt{(\omega_0/m)(n_i+1)} \left(e'_z e_- \frac{\omega}{\omega - \omega_0} \cos\theta + e'_- e_z \frac{\omega - \omega_0}{\omega} \cos\theta' \right) \delta_{n_f, n_i+1} -$$

$$\left. - i\sqrt{(\omega_0/m) n_i} \left(e'_z e_+ \frac{\omega}{\omega + \omega_0} \cos\theta + e'_+ e_z \frac{\omega + \omega_0}{\omega} \cos\theta' \right) \delta_{n_f, n_i-1} \right\}, \tag{3}$$

где $\theta(\theta')$ — угол между направлением распространения падающего (рассеянного) фотона и магнитным полем. В указанном приближении $\omega' = (n_i - n_f)\omega_0 + \omega$.

Сечение рассеяния определяется выражением

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_f |M_{fi}|^2 \frac{\omega'^2 do'\, d\omega'}{2\omega\, 2\omega'} \delta(\varepsilon_f + \omega' - \varepsilon_i - \omega).$$

Далее нетрудно получить сечение, усредненное по поляризациям падающего и просуммированное по поляризациям рассеянного фотонов.

Сечение когерентного рассеяния $(n_f = n_i)$ совпадает с полученным в работе [3]. Сечения некогерентного рассеяния $(n_f \neq n_i,\ \omega' \neq \omega)$

$$\frac{d\sigma}{do'}(n_f = n_i - 1) = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{\omega_0}{m} \cos^2\theta' (1 + \cos^2\theta') n_i \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega}\right)^3, \tag{4}$$

$$\frac{d\sigma}{do'}(n_f = n_i + 1) = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{\omega_0}{m} \cos^2\theta' (1 + \cos^2\theta') (n_i + 1) \left(1 - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^3 \tag{5}$$

отличаются от полученных в [3]. Приведенные в [3] сечения при $\omega \to 0$ стремятся к нулю $\sim\omega^2$. Как следует из (3)—(5), в случае, когда проекция вектора поляризации падающего фотона на направление магнитного поля отлична от нуля, сечение процесса расходится на низких частотах как ω^{-3}.

Аналогичный вывод следует также из работы [4]. В ней было показано, что для процессов, идущих и в отсутствие поля внешней волны, поглощение дополнительного мягкого фотона приводит к расходимости сечения $\sim\omega^{-3}$. Легко усмотреть связь этой расходимости с расходимостью сечения рассеяния. Некогерентное рассеяние в магнитном поле, когда частота рассеянного фотона $\omega' = \omega + \omega_0 \simeq \omega_0$, можно рассматривать как магнитотормозное излучение с поглощением длинноволнового фотона. Действительно, добавляя внешнюю фотонную линию к диаграмме однофотонного излучения в магнитном поле, можно получить матричный элемент рассеяния мягкого фотона в виде

$$M_{fi} = \frac{e\sqrt{4\pi}}{m\omega^{\frac{3}{2}}} e_z (p_{zf} - p_{zi}) M_{fi}^{(0)},$$

где $M_{fi}^{(0)}$ — матричный элемент магнитотормозного излучения, не равный нулю только при условии $n_f \neq n_i$.

Чтобы устранить расходимость сечения, рассмотрим рассеяние как эффект первого порядка, в котором точно учитывается взаимодействие падающей волны с электроном в магнитном поле. Для этого найдем решение уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}(-i\nabla - e\mathbf{A}_0 - e\mathbf{A}(t))^2\psi. \tag{6}$$

Вектор-потенциал волны в дипольном приближении $\mathbf{A}(t) = a\mathbf{e}\cos\omega t$. Ограничиваясь наиболее интересным случаем волны, поляризованной вдоль поля ($\mathbf{e} = (0, 0, 1)$), запишем решение (6) в виде [5]

$$\psi(t, \mathbf{r}) = (L_x L_z)^{-1/2}\exp\left[-i\varepsilon_{np_z}t + i(p_x x + p_z z) - iR(t)\right]u_n(\eta),$$

$$\varepsilon_{np_z} = \frac{p_z^2}{2m} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_0 + \frac{e^2a^2}{4m},$$

$$R(t) = -\frac{ea}{m\omega}p_z\sin\omega t + \frac{e^2a^2}{8m\omega}\sin 2\omega t,$$

$$u_n(\eta) = (m\omega_0)^{1/4}(2^n n!\,\pi^{1/2})^{-1/2}H_n(\eta)e^{-\eta^2/2}. \tag{7}$$

Здесь $H_n(\eta)$ — полином Эрмита,

$$\eta = (m\omega_0)^{1/2}\left(y - \frac{p_x}{m\omega_0}\right).$$

Это решение применимо, если мал параметр интенсивности волны:

$$\xi = \frac{ea}{m} = \frac{eF}{m\omega} \ll 1,$$

где F — амплитуда напряженности поля волны.

Матричный элемент перехода электрона из состояния $|i\rangle = |np_xp_z\rangle$ в состояние $|f\rangle = |n'p_x'p_z'\rangle$ с испусканием фотона $k' = (\omega', \mathbf{k}')$ с поляризацией $\mathbf{e}'$ имеет вид

$$M_{fi} = -\frac{2\pi e}{m}(4\pi)^{1/2}\sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s\left(\xi\frac{\omega'}{\omega}\cos\theta'\right)\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{2}eae_z'[\delta(\omega' + \omega - s\omega) + \delta(\omega' - \omega - s\omega)]\delta_{n'n} + \right.$$
$$+ (m\omega_0)^{1/2}[e_+'\sqrt{n}\,\delta_{n',n-1}\delta(\omega' - \omega_0 - s\omega) +$$
$$\left. + e_-'\sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1}\delta(\omega' + \omega_0 - s\omega)]\right\},$$

где $J_s(x)$ — функция Бесселя.

Разделив вероятность излучения фотона $\mathbf{k}'$ на плотность потока падающих фотонов $a^2\omega/8\pi$, получим следующее выражение для сечения рассеяния, просуммированное по поляризациям рассеянного фотона:

$$\frac{d\sigma}{do'\,d\omega'} = r_0^2\sum_s\left\{\sin^2\theta'\,[J_{s-1}^2(s\xi\cos\theta') + J_{s+1}^2(s\xi\cos\theta')]\times\right.$$

$$\times s\delta(\omega' - s\omega) + 2(1 + \cos^2\theta')\frac{\omega_0}{m}\frac{\omega'}{\omega}\xi^{-2}[n\,\delta(\omega' - \omega_0 - s\omega) +$$

$$+ (n+1)\,\delta(\omega' + \omega_0 - s\omega)]\,J_s^2\left(\xi\frac{\omega'}{\omega}\cos\theta'\right)\Bigg\}. \qquad (8)$$

Слагаемые с $s=1$ соответствуют поглощению из волны фотона частоты ω и испусканию фотона частоты ω', т. е. комптоновскому рассеянию. Сечение некогерентного рассеяния имеет правильную инфракрасную асимптотику: при $\omega \to 0$ сечение также стремится к нулю.

Из (8) видно, что теория возмущений применима при выполнении неравенства

$$\xi\frac{\omega_0}{\omega} \ll 1, \qquad (9)$$

ограничивающего снизу частоту падающего фотона условием

$$\omega \gg \left(eF\frac{H}{H_0}\right)^{1/2}, \qquad (10)$$

где $H_0 = m^2/e$ — критическое поле.

При условии (9) выражение (6) можно разложить в ряд. Оставляя главные члены разложения, получим результат, следующий из теории возмущений (3)—(5):

$$\frac{d\sigma}{do'} = r_0^2\left\{\sin^2\theta' + \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{m}\cos^2\theta'(1 + \cos^2\theta') \times\right.$$

$$\left.\times\left[n\left(1 + \frac{\omega_0}{\omega}\right)^3 + (n+1)\left(1 - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^3\right]\right\}.$$

Отметим, что формула (8) при больших квантовых числах, когда можно положить $n + 1 \simeq n \simeq mv_\perp^2/2\omega_0$ ($v_\perp$ — поперечная полю составляющая скорости электрона), следует также и из классической теории. Для этого в выражение для вектор-потенциала поля излучения [6] надо подставить решение классических уравнений движения электрона в магнитном поле и поле волны.

В заключение авторы выражают благодарность участникам семинара проф. А. А. Соколова за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., 1969.
2. Синхротронное излучение, под ред. А. А. Соколова, И. М. Тернова. М., 1966.
3. Гуревич Л. Э., Павлов С. Т. ЖТФ, **30**, 41, 1960.
4. Никишов А. И., Ритус В. И. ЖЭТФ, **46**, 1768, 1964.
5. Олейник В. П. «Украинский физический журнал», **13**, 1205, 1968.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1967, § 66.

Поступила в редакцию
6.7 1972 г.

Кафедра
теоретической физики