Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1974.

УДК 521.13

Г. Г. КОМАН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ОРБИТЫ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЛУНЫ ПО НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ

В ранней работе автора[1] были рассмотрены промежуточные орбиты искусственных спутников Луны, основанные на несимметричном варианте задачи двух неподвижных центров. Исходя из результатов этой работы, в данной статье для начального момента времени по известному положению спутника и трех проекций его скорости выводятся все формулы, позволяющие определить элементы промежуточной орбиты искусственных спутников Луны.

§ 1. Постановка задачи

Будем рассматривать промежуточную орбиту искусственного спутника Луны, основанную на несимметричном варианте задачи двух неподвижных центров. В прямоугольной луноцентрической селеноэкваториальной системе координат уравнения, определяющие промежуточное движение спутника, имеют следующий вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial W}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial W}{\partial y},\quad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial W}{\partial z}, \tag{1}$$

где

$$W=\frac{fm}{r}\left\{1+\sum_{k=2}^{\infty} I_k'\left(\frac{r_0}{r}\right)^k P_k\left(\frac{z}{r}\right)\right\},$$

а

$$I_k'=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{r_0}\right)^k(1-\gamma)^2\left[(1-\gamma)^{k-1}+(-1)^k(1+\gamma)^{k-1}\right].$$

Здесь f — постоянная тяготения, m и r_0 — масса и средний экваториальный радиус Луны, $P_k\left(\frac{z}{r}\right)$ — полином Лежандра k-го порядка, c и γ — некоторые постоянные, равные $c=92{,}076$ *км*, $\gamma=-1{,}036$, и $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — луноцентрический радиус-вектор искусственного спутника Луны.

[1] См. Г. Г. Коман. Промежуточные орбиты искусственных спутников Луны. «Сообщения ГАИШ», № 186, 3—45, 1973.

В дальнейшем в этой статье будем упоминать только данную работу.

Заметим, что уравнения (1) полностью учитывают влияние второй и третьей зональных гармоник потенциала притяжения Луны.

В указанной работе автора уравнения (1) были проинтегрированы и получены все формулы, выражающие координаты спутника как функции времени и шести постоянных интегрирования. В данной статье покажем, что, зная для начального момента времени ($t=t_0$) положение спутника и три проекции его скорости, можно вывести все формулы, позволяющие находить элементы орбиты.

Пусть переход от координат x, y, z к координатам ξ, η и ω дается формулами

$$x = \sqrt{(\xi^2 - c^2)(1-\eta^2)}\cos w, \quad y = \sqrt{(\xi^2 - c^2)(1-\eta^2)}\sin w,$$

$$z = -c\gamma + \xi\eta. \tag{2}$$

Тогда для уравнений (1) имеем три первых интеграла, которые можно записать в виде

$$l^2\dot{\xi}^2 = 2h\,\xi^4 + 2fm\,\xi^3 - (c_2^2 + 2hc^2)\,\xi^2 - 1fmc^2\xi + c^2(c_2^2 - c_3^2), \tag{3}$$

$$l^2\dot{\eta}^2 = 2hc^2\eta^4 - 2fmc\gamma\eta^3 - (c_2^2 + 2hc^2)\,\eta^2 + 2fmc\gamma\eta + c_2^2 - c_3^2, \tag{4}$$

$$\dot{w} = \frac{c_3}{(\xi^2 - c^2)(1-\eta^2)}, \tag{5}$$

и интеграл энергии

$$V^2 = \frac{2fm(\xi + c\gamma\eta)}{\xi^2 - c^2\eta^2} + 2h. \tag{6}$$

Здесь через h, c_2, c_3 обозначены произвольные постоянные интегрирования. Вместо них введем более удобные и имеющие наглядный геометрический смысл элементы a, e, s. Связь между постоянными h, c_2, c_3 и a, e, s дается формулами

$$a = -\frac{fm}{2h}\{1 + \varepsilon^2(1-e^2)(1-s^2) + \varepsilon^4 s^2(1-e^2)(3+e^2)(1-s^2) +$$
$$+ \varepsilon^4\gamma^2(1-e^2)(1-s^2)(1-7s^2)\}, \tag{7}$$

$$c_2^2 = fma(1-e^2)\{1 - 2\varepsilon^2(1+e^2)(1-s^2) + \varepsilon^4(1-s^2)[(1-6s^2) -$$
$$- 2e^2(1+4s^2) + e^4(1-2s^2)] - 2\varepsilon^4\gamma^2(1+e^2)(1-s^2)(1-7s^2)\}, \tag{8}$$

$$c_3^2 = fma(1-e^2)(1-s^2)\{1 - \varepsilon^2(2 - 3s^2 + 2e^2 - e^2s^2) + \varepsilon^2\gamma^2(1-7s^2) +$$
$$+ \varepsilon^4(1-s^2)[(1-5s^2) - 2e^2(1+5s^2) + e^4(1-s^2)] +$$
$$+ \varepsilon^4\gamma^2(1-e)(1 - 17s^2 + 22s^4) - \delta^4\gamma^4(2 - 19s^2 + 7s^4)\}, \tag{9}$$

где параметр ε определяется равенством $\varepsilon = \dfrac{c}{a(1-e^2)}$.

Для определения координат спутника вместо формулы (2) удобно пользоваться аналогичными формулами, полученными в указанной моей работе:

$$x = \rho(\cos\varphi\cos\bar{\Omega} - \alpha\sin\varphi\sin\bar{\Omega} - \beta\sin\bar{\Omega}),$$

$$y = \rho(\cos\varphi\sin\bar{\Omega} + \alpha\sin\varphi\cos\bar{\Omega} + \beta\cos\bar{\Omega}), \tag{10}$$

$$z = -c\gamma + \rho'(\bar{s} + s\sin\varphi),$$

где

$$\rho = \frac{\sqrt{\gamma^{-1}(\xi^2 - c^2)}}{1 + d\sin\varphi}, \quad \rho' = \frac{\xi}{1 + d\sin\varphi},$$

$$\xi = \frac{a\,[(1 - e\bar{e}) + (\bar{e} - e)\cos\psi]}{1 + \bar{e}\cos\psi}, \tag{11}$$

$$s = \sin i, \ \alpha = \cos i\,\{1 + 2\,\varepsilon^4\gamma^2 s^2 (1 - s^2)(1 - e^2) - 2\varepsilon^4\gamma^4 s^2 (1 - 2s^2)\}. \tag{12}$$

Для дальнейших расчетов воспользуемся формулами из указанной работы автора: (109), (101), (102), (197), (180), (182), (183) и (184).

§ 2. Определение элементов a, e, s и n_0

Введем следующие обозначения:

$$r^{*2} = x^2 + y^2 + (z c\gamma)^2, \ \ V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + z^2,$$
$$r^{**2} = x\dot{x} + y\dot{y} + (z + c\gamma)\,\dot{z}, \ \ I = \xi^2 - c^2\eta^2. \tag{13}$$

Тогда из уравнений (2), учитывая, что в реальном движении $\xi^2 > c^2$, и используя (13), находим

$$\xi^* = \frac{r^{*2} + c^2}{2}\left\{1 + \sqrt{1 - \frac{4c^2 (z + c\gamma)^2}{(r^{*2} + c^2)^2}}\right\},$$

$$\eta = \frac{z + c\gamma}{\xi}, \quad \operatorname{tg} w = \frac{y}{x}.$$

Здесь

$$\operatorname{sgn}\cos w = \operatorname{sgn} x.$$

Продифференцировав по времени формулы (2) и разрешив полученные формулы относительно $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{w}$, найдем

$$\dot{w} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{(\xi^2 - c^2)(1 - \eta^2)}, \ I\dot{\xi} = r^{**}\xi - c^2\eta\,\dot{z},$$
$$I\dot{\eta} = \dot{z}\xi - \eta\, r^{**}. \tag{14}$$

Из интегралов (4), (5), (6) и равенства (14) определяем

$$2h = V^2 - \frac{2fm(\xi + c\gamma\eta)}{I},$$

$$c_2^2 = (1 - \eta^2)^{-1}(c_3^2 + I^2\dot{\eta}^2) + 2hc^2\eta^2 - 2fmc\gamma\eta,$$

$$c_3 = x\dot{y} - y\dot{x},$$

а затем из формул (7), (8) и (9) найдем

$$a = a_0\{1 + \varepsilon^2(1 - e^2)(1 - s^2) + \varepsilon^4 s^2 (1 - e^2)(3 + e^2)(1 - s^2) +$$
$$+ \varepsilon^4\gamma^2(1 - e^2)(1 - s^2)(1 - 7s^2)\}, \tag{15}$$

$$1 - e^2 = (1 - e_0^2)\{1 + \varepsilon^2(1 + 3e^2)(1 - s^2) + 2\varepsilon^4(1 - s^2)[1 + e^2(4 + 2s^2) +$$
$$+ e^4(3 - 2s^2)] + \varepsilon^4\gamma^2(1 + 3e^2)(1 - s^2)(1 - 7s^2)\}, \tag{16}$$

$$1 - s^2 = (1 - s_0^2)\{1 - \varepsilon^2 s^2 (1 - e^2) - \varepsilon^2\gamma^2 (1 - 7s^2) -$$
$$- \varepsilon^4 s^2 (1 - e^2)(3 - 4s^2 + e^2) - \varepsilon^4\gamma^2 [(5 - 51s^2 + 64s^4) +$$
$$+ e^2 (3 - 13s^2 - 8s^4)] + \varepsilon^4\gamma^4 (3 - 33s^2 + 56s^4)], \tag{17}$$

где

$$a_0 = -\frac{fm}{2h}, \quad e_0^2 = 1 + \frac{2c_2^2 h}{(fm)^2}, \quad s_0^2 = 1 - \frac{c_3^2}{c_2^2}. \tag{18}$$

Наконец, для постоянной n_0 из формулы (7) получаем

$$n_0 = \sqrt{\frac{(-2h)^3}{(fm)^2}}.$$

Уравнения (16)—(18) следует решать численно методом последовательных приближений, принимая за нулевое приближение для a, e, s величины a_0, e_0, s_0.

§ 3. Определение элементов ω_0, Ω_0, M_0

Обозначим

$$q = \frac{\eta - \bar{s}}{s - \eta d}, \tag{19}$$

тогда из (109) следует

$$\sin\varphi = q.$$

Продифференцировав по времени формулу (109) и используя (19), найдем

$$\cos\varphi = \frac{(s - \bar{s} d)\,\dot{\eta}\, I}{\sigma_1 (s - \eta d)^2 \sqrt{1 - k_1^2 q^2}}.$$

Положим

$$q^* = \frac{a(1 - e\bar{e}) - \xi}{\xi\bar{e} - a(\bar{e} - e)},$$

тогда из (11) получаем

$$\cos\psi = q^*. \tag{20}$$

Если продифференцировать по времени формулу (11) и использовать (101) и (20), то найдем

$$\sin\psi = \frac{ae(1 - \bar{e}^2)\,\dot{\xi}\, I}{\sigma_2 [\xi\bar{e} - a(\bar{e} - e)]^2 \sqrt{1 - k_2^2 (1 - q^{*2})}}.$$

Зная φ и ψ, из равенства (102), легко находим

$$\omega_0 = \varphi - \frac{k_1^2}{8}\left(1 + \frac{k_1^2}{2}\right)\cdot \sin 2\varphi + \frac{3}{256} k_1^4 \cdot \sin 4\varphi -$$
$$- (1 + \nu)\left[\psi - \frac{k_2^2}{8}\left(1 + \frac{k_2^2}{2}\right)\sin 2\psi + \frac{3}{256} k_2^4 \sin 4\psi\right].$$

Обозначим

$$\rho^* = \frac{\rho\,(y\cos\varphi - \alpha\cdot x\sin\varphi - \beta x)}{x^2+y^2}.$$

Тогда из уравнений (10) найдем

$$\sin\bar{\Omega} = \rho^*,$$

$$\cos\bar{\Omega} = \frac{\rho\,(x\cos\varphi - \alpha y\sin\varphi + \beta y)}{x^2+y^2}.$$

Теперь мы можем определить

$$\Omega_0 = \bar{\Omega} - \mu\psi - \mu_1\sin\psi - \mu_2\sin 2\psi - \mu_3\sin 3\psi -$$

$$- \mu_4\sin 4\psi - \bar{\mu}_1\cos\theta - \bar{\mu}_2\sin 2\theta,$$

где θ дается формулой (184).

Найдем последний элемент M_0. Для этого сначала определяем из равенства (180).

$$E = 2\,\mathrm{Arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\cdot \mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2}\right),$$

затем по формуле (182) находим M и наконец из (184) имеем

$$M_0 = M - n_0(t-t_0).$$

Заметим, что E и ψ лежат в одной четверти.

§ 4. Окончательные формулы

Пусть для момента времени $t=t_0$ даны:

$$x = x_0,\quad y = y_0,\quad z = z_0,$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0,\quad \dot{y} = \dot{y}_0,\quad \dot{z} = \dot{z}_0.$$

Приведем для этого случая все формулы, необходимые для вычисления элементов орбиты.

Предварительно находим

$$r_0^{*2} = x_0^2 + y_0^2 + (z_0 + c\gamma)^2,\quad V_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2.$$

$$r_0^{**} = x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + (z_0 + c\gamma)\dot{z}_0,\quad I_0 = \xi_0^2 - c^2\eta_0^2.$$

Определение элементов a, e, s, n_0. Находим $\xi_0, \eta_0, \omega_0, \dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{w}_0$

$$\xi_0^2 = \frac{r_0^{*2} + c^2}{2}\left\{1 + \sqrt{1 - \frac{4c^2(r_0 + c\gamma)^2}{(r_0^{*2} + c^2)^2}}\right\},$$

$$\eta_0 = \frac{z_0 + c\gamma}{\xi_0},\quad \mathrm{tg}\,w_0 = \frac{y_0}{x_0},$$

$$I_0\dot{\xi}_0 = r_0^{**}\xi_0 - c^2\eta_0\dot{z}_0,\qquad \dot{w}_0 = \frac{x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0}{(\xi_0^2 - c^2)(1-\eta_0^2)}.$$

$$I_0\dot{\eta}_0 = z_0\xi_0 - \eta_0 r_0^{**},$$

При этом

$$\xi_0^2 > c^2,\quad \mathrm{sgn}\,\cos w_0 = \mathrm{sgn}\,x_0.$$

Затем определяем h, c_2^2, c_3:

$$2h = V_0^2 - 2fm(\xi_0 + c\gamma\eta_0)I_0^{-1},$$

$$c_2^2 = (1-\eta_0^2)^{-1}(c_3^2 + I_0^2\dot{\eta}_0^2) + 2hc^2\eta_0^2 - 2fmc\gamma\eta_0,$$

$$c_3 = x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0.$$

Далее, находим

$$a_0 = -\frac{fm}{2h}, \quad e_0^2 = 1 + \frac{2c_2^2 h}{(fm)^2}, \quad s_0^2 = 1 - \frac{c_3^2}{c_2^2}.$$

Если разрешить уравнения (15) — (17) методом последовательных приближений, найдем

$$a = a_0\{1 + \varepsilon_0^2(1-e_0^2)(1-s_0^2) - \varepsilon_0^4(1-e_0^2)(1-s_0^2) \times$$
$$\times [(3-5s_0^2) + e_0^2(1-3s_0^2)]\},$$

$$1 - e^2 = (1-e_0^2)\{1 + \varepsilon_0^2(1+3e_0^2)(1-s_0^2) - \varepsilon_0^4(1-s_0^2)[(5-6s_0^2) +$$
$$+ e_0^2(14-24s_0^2) - e_0^2(3+2s_0^2)]\},$$

$$1 - s^2 = (1-s_0^2)\{1 - \varepsilon_0^2 s_0^2(1-e_0^2) - \varepsilon_0^2\gamma^2(1-7s_0^2) -$$
$$- \varepsilon_0^4 s_0^2(1-e_0^2)^2(1-2s_0^2) - 2\varepsilon_0^4\gamma^2(1-e_0^2)(1-17s_0^2+25s_0^4) +$$
$$+ \varepsilon_0^4\gamma^4(10-79s_0^2+105s_0^4)\},$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{c}{a_0(1-e_0^2)}.$$

Элемент n_0 определяем по формуле

$$n_0 = \sqrt{\frac{fm}{a_0^3}}.$$

Определение элементов ω_0, Ω_0, M_0. Находим q_0, q_0^*

$$q_0 = \frac{\eta_0 - \bar{s}}{s - \eta_0 d}, \quad q_0^* = \frac{a(1-e\bar{e}) - \xi_0}{\xi_0\bar{e} - a(\bar{e} - e)}.$$

Затем вычисляем φ_0 и ψ_0

$$\cos\varphi_0 = \frac{(s - \bar{s}d)\dot{\eta}_0 I_0}{\sigma_1(s - \eta_0 d)^2\sqrt{1 - k_1^2 q_0^2}},$$

$$\sin\psi_0 = \frac{ae(1-\bar{e}^2)\dot{\xi}_0 I_0}{\sigma_2[\xi_0\bar{e} - a(\bar{e} - e)]^2\sqrt{1 - k_2^2(1 - q^{*2})}},$$

При этом

$$\operatorname{sgn}\sin\varphi_0 = \operatorname{sgn} q_0, \quad \operatorname{sgn}\cos\psi_0 = \operatorname{sgn} q^*.$$

Определяем элемент

$$\omega_0 = \varphi_0 - \frac{k_1^2}{8}\left(1 + \frac{k_1^2}{2}\right)\sin^2\varphi_0 + \frac{3}{256}k_1^4 \sin 4\varphi_0 -$$

$$-(1+\nu)\left[\psi_0 - \frac{k_2^2}{8}\left(1 + \frac{\bar{k}_2^2}{2}\right)\sin 2\psi_0 + \frac{3}{256}k_2^4 \sin 4\psi_0.\right.$$

Вычисляем ρ_0^* и θ_0:

$$\rho_0^* = \frac{\rho_0\,(y_0\cos\varphi_0 - \alpha x_0 \sin\varphi_0 - \beta\chi_0)}{x_0^2 + y_0^2},$$

$$\theta_0 = (1+\nu)\,\psi_0 + \omega_0.$$

Затем находим $\bar{\Omega}_0$:

$$\cos\bar{\Omega}_0 = \frac{\rho_0\,(x_0\cos\varphi_0 + \alpha y_0 \sin\varphi_0 + \beta\, y_0)}{x_0^2 + y_0^2}.$$

При этом

$$\operatorname{sgn}\sin\bar{\Omega}_0 = \operatorname{sgn}\rho_0^*$$

Определяем элемент Ω_0:

$$\Omega_0 = \bar{\Omega}_0 - \mu\psi_0 - \mu_1\sin\psi_0 - \mu_2\sin 2\psi_0 - \mu_3\sin 3\psi_0 -$$

$$-\mu_4\sin 4\psi_0 - \bar{\mu}_1\cos\theta_0 - \bar{\mu}_2\sin 2\theta_0$$

Наконец, определив E_0:

$$E_0 = 2\,\mathrm{Arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\bar{e}}{1+\bar{e}}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\psi_0}{2}\right),$$

найдем последний элемент

$$M_0 = E_0 - e^*\sin E_0 - \lambda\psi_0 + \lambda_1\sin\psi_0 + \lambda_2\sin 2\psi_0 + \bar{\lambda}_1\cos\theta_0 +$$

$$+\bar{\lambda}_2\sin 2\theta_0 + \bar{\lambda}_3\cos 3\theta_0 + \bar{\lambda}_4\sin 4\theta_0 + \bar{\lambda}_{22}\sin 2\psi_0\cos 2\theta_0.$$

Итак, по известным начальным данным мы можем определить все элементы промежуточной орбиты.