Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1974

УДК 538.56

А. С. ДЕМЕНТЬЕВ, Ю. Г. ПАВЛЕНКО

ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В ОДНОРОДНЫХ СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ

Методами классической и квантовой теорий найдено спектрально-угловое распределение мощности спонтанного и индуцированного излучения релятивистского электрона, движущегося в однородных скрещенных магнитном и электрическом полях ($|\mathbf{E}|<|\mathbf{H}|$).

В последнее время большое внимание уделяется излучению электронов, движущихся в статических и переменных электромагнитных полях [1, 2]. Это связано с усиленным изучением возможности генерации электромагнитных волн в миллиметровом и световом диапазонах.

Шнейдер и Гапонов показали, что электрон в однородном магнитном поле усиливает внешнее излучение за счет релятивистских поправок [3, 4]. На практике важно получить излучение большой мощности в достаточно широком диапазоне частот. Так, в работах [5, 6] было показано, что возможно резонансное усиление на высоких гармониках основной частоты.

В настоящей работе рассчитана по классической и квантовой теориям спектрально-углового распределения мощность спонтанного и индуцированного излучений релятивистского электрона, движущегося в вакууме в однородных постоянных скрещенных полях ($|\mathbf{E}|<|\mathbf{H}|$). Такой расчет представляет интерес и в астрофизике, так как с определенной степенью точности электромагнитные поля в космосе можно считать скрещенными [7].

Спонтанное излучение

Рассмотрим движение электрона в однородных скрещенных электрическом и магнитном полях, задаваемых вектор-потенциалом

$$\mathbf{A}=(-Hy, 0, 0) \tag{1}$$

и скалярным потенциалом

$$\Phi=-kHy,\ 0\leqslant k<1. \tag{2}$$

Пусть в начальный момент времени t_0 электрон находился в точке пространства, задаваемой радиус-вектором $\mathbf{r}_0$, и имел скорость $\mathbf{v}_0=c\boldsymbol{\beta}_0$.

Из классических уравнений движения следует, что закон движения электрона можно записать в виде (см. также [8, 9])

$$x - x_0 = \frac{ck}{\omega_0}(\xi - \xi_0) + \frac{R}{\sqrt{1-k^2}}(\cos\xi - \cos\xi_0),$$

$$y - y_0 = R(\sin\xi - \sin\xi_0), \tag{3}$$

$$z - z_0 = \frac{c\beta_{0z}}{\Omega\sqrt{1-k^2}}(\xi - \xi_0),$$

$$t - t_0 = \frac{1}{\omega_0}(\xi - \xi_0) + \frac{Rk}{c\sqrt{1-k^2}}(\cos\xi - \cos\xi_0).$$

Здесь введены обозначения

$$\Omega = \frac{e_0 H}{mc}\sqrt{1-\beta_0^2},\ \omega_0 = \Omega\frac{(1-k^2)^{3/2}}{1-\beta_{0x}k},\ R = \frac{\beta_E c}{\Omega\sqrt{1-k^2}}, \tag{4}$$

$$\beta_E^2 = \beta_{0y}^2 + \frac{(\beta_{0x}-k)^2}{1-k^2},\ \beta_{0y} = \beta_E\cos\xi_0,\ \frac{k-\beta_{0x}}{\sqrt{1-k^2}} = \beta_E\sin\xi_0.$$

Из уравнений (3) и соотношений (4) видно, что электрон движется вдоль оси z со средней скоростью $c\overline{\beta}_z = c\beta_{0z}\frac{1-k^2}{1-k\beta_{0x}}$ и совершает дрейф в сторону положительных значений оси x со скоростью ck. Таким образом, электрон совершает колебания относительно прямой, лежащей в плоскости xz и образующей с осью z угол $\theta_0 = \operatorname{arctg}\frac{k}{\beta_{0z}}\cdot\frac{1-k^2}{1-k\beta_{0x}}$. Уже отсюда ясно, что при $\beta_0 \sim 1$ и $k \ll 1$ основная часть энергии будет излучаться в этом направлении.

Определяя полную мощность излучения по всем направлениям по формуле [10]

$$P(t) = \frac{2e_0^2}{3m^2c^3}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2\left(\dot{\mathbf{p}}^2 - \frac{1}{c^2}\dot{E}^2\right), \tag{5}$$

где $\mathbf{p}$ и E — импульс и энергия электрона, найдем

$$P(t) = \frac{2e_0^4H^2(1-k^2)\beta_E^2}{3m^2c^3(1-\beta_0^2)}. \tag{6}$$

Отношение мощности излучения P в скрещенных полях к мощности излучения P_H в магнитном поле ($k=0$) при одинаковых начальных условиях равно

$$\frac{P}{P_H} = \frac{(\beta_{0x}-k)^2 + (1-k^2)\beta_{0y}^2}{\beta_{0x}^2 + \beta_{0y}^2}. \tag{7}$$

Из (7) следует, что $P_H \ll P$ при $\beta_{0\perp} \ll k$, где $\beta_{0\perp} = \sqrt{\beta_{0x}^2 + \beta_{0y}^2}$.

Рассмотрим далее спектрально-угловое распределение мощности излучения. Используя известные формулы [9], найдем

$$\frac{dP(\mathbf{n})}{do} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{dP_s(\mathbf{n})}{do}, \tag{8}$$

где угловое распределение мощности излучения s-гармоники с частотой $\omega = s\frac{\omega_0}{\Delta}$ в направлении $\mathbf{n}$ определяется выражением

$$\frac{dP_s(\mathbf{n})}{do} = \frac{(e_0 s\omega_0^2 R)^2}{2\pi c^3\Delta^3}\left\{\left(\frac{1-\eta^2}{\eta^2} - \frac{1-\beta_0^2}{\beta_E^2}\right) J_s^2(s\eta) + J_s'^2(s\eta)\right\}. \qquad (9)$$

Здесь

$$\eta = \frac{\omega_0 R n_E}{\Delta c}, \quad n_E = \sqrt{\frac{(n_x-k)^2}{1-k^2} + n_y^2}, \quad \Delta = 1 - kn_x - \overline{\beta}_z n_z; \quad J_s(x), \quad J_s'(x)$$

функция Бесселя и ее производная.

Интегрируя по углам в (9), нетрудно получить

$$P_s = \frac{e_0^2\Omega^2 s(1-k^2)(1-\beta_0^{*2})}{c\beta_0^*}\left\{2\beta_0^{*2} J_{2s}'(2s\beta_0^*) - (1-\beta_0^{*2})\int_0^{2\beta_0^* s} J_{2s}(x)\,dx\right\}, \qquad (10)$$

где

$$\beta_0^* = \frac{\sqrt{(k-\beta_{0x})^2 + (1-k^2)\beta_{0y}^2}}{\sqrt{(1-k\beta_{0x})^2 - (1-k^2)\beta_{0z}^2}}.$$

Отсюда видно [11], что в случае $1-\beta_0^{*2} \ll 1$ основной вклад в полную мощность дают гармоники вблизи $s_{\text{кр}} = \frac{3}{2}(1-\beta_0^{*2})^{-3/2}$.

Исследуем подробнее случай малых углов влета электрона к магнитному полю, а именно

$$\beta_{0\perp} \ll \sqrt{1-\beta_{0z}^2}, \quad k \lessgtr \sqrt{1-\beta_{0z}^2} \equiv \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}, \quad \beta_{0z} \sim 1.$$

В этом случае $\beta_0^* \approx \frac{k}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel} + k^2}} \leqslant \frac{1}{2}$ и, следовательно, как видно из выражений (9), (10), максимум в спектре будет наблюдаться на основной частоте, а энергия излучения будет сконцентрирована около направления, определяемого углами $\varphi = 0$, $\theta \approx k$. Для углового распределения мощности дипольного излучения из (9) получаем

$$\frac{dP_1(\mathbf{n})}{do} = \frac{2e_0^2\Omega^2\beta_E^2}{\pi c} \cdot \frac{(\theta^4 + \varepsilon_{\parallel}^2 + 4k^2\theta^2\cos^2\varphi + 2k^4 + 2\theta^2 k^2 - 2\varepsilon_{\parallel} k\theta\cos\varphi + 2k^2\varepsilon_{\parallel})}{(\theta^2 + \varepsilon_{\parallel} - 2k\theta - 2k\theta\cos\varphi + 2k^2)^5}. \qquad (11)$$

В случае одного магнитного поля ($k=0$) выражение (11) совпадает с полученным в [2]

$$\frac{dP_1^H(\mathbf{n})}{do} = 2\,\frac{e_0^2\Omega^2\beta_{0\perp}^2}{\pi c} \cdot \frac{(\theta^4 + \varepsilon_{\parallel}^2)}{(\theta^2 + \varepsilon_{\parallel})^5}$$

и достигает максимума при $\theta = 0$, равного

$$\frac{dP_1^H(\mathbf{n})}{do} = 2\,\frac{e_0^2\Omega^2\beta_{0\perp}^2}{\pi c} \cdot \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}^3}. \qquad (12)$$

При наличии же электрического поля, удовлетворяющего наложенным выше условиям, при $\theta \approx k = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$ и $\varphi = 0$ получаем

$$\frac{dP_1(\mathbf{n})}{do} = 2\,\frac{e_0^2\Omega^2 k^2}{\pi c} \cdot \frac{1}{4\varepsilon_{\parallel}^3}. \qquad (13)$$

Таким образом, из формул (10) и (13) видно, что мощность излучения при наличии электрического поля при малых углах влета к магнитному полю значительно превосходит мощность излучения в одном магнитном поле, так как $k^2 \gg \beta_{0\perp}^2$.

Вынужденное излучение

При анализе различных вопросов, связанных с излучением, особый интерес представляет квантовомеханический подход даже в тех случаях, когда излучающая система является по существу классической. Это связано с тем обстоятельством, что только в квантовой теории процессы испускания и поглощения получают простое и наглядное истолкование.

При исследовании вопроса об индуцированном излучении будем исходить из решения уравнения Клейна—Гордона, поскольку учет спиновых эффектов дает в этом случае лишь незначительные поправки.

Нормированные волновые функции электрона, движущегося в полях (1), (2), зависят от квантовых чисел p_x, $n_1 p_z$ и имеют вид

$$\psi_n(\mathbf{r}, t) = \frac{N\gamma^{1/4}}{\sqrt{L_x L_z}} \exp\left\{-\frac{iE_n t}{\hbar} + \frac{iP_x x}{\hbar} + \frac{iP_z z}{\hbar}\right\} \overline{H}_n(y_n), \tag{14}$$

где

$$N = \sqrt{\frac{mc^2(1-k^2)}{E_n - ckp_x}}, \quad \gamma = \frac{e_0 H}{c\hbar}\sqrt{1-k^2}, \quad y_n = \sqrt{\gamma}\left(y - \frac{cp_x - kE_n}{\hbar\gamma c\sqrt{1-k^2}}\right),$$

$$\overline{H}_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x).$$

Собственные значения энергии E_{p_x, n, p_z} (для краткости обозначим E_n) равны

$$E_n = ckp_x + \sqrt{1-k^2}\,[m^2c^4 + c^2p_z^2 + e_0 c\hbar H(2n+1)]^{1/2}. \tag{15}$$

Частота перехода электрона из начального состояния $n(p_x, n, p_z)$ в конечное состояние $n'(p_x', n', p_z')$ определяется из закона сохранения энергии-импульса

$$\omega_n^{n'} = \frac{e_0 Hc\Delta\sqrt{1-k^2}}{\hbar\omega_0 n_E^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2s\hbar\omega_0^2 n_E^2}{\sqrt{1-k^2}\, e_0 Hc\Delta^2}}\right). \tag{16}$$

Приравнивая средние квадраты энергии, вычисленные по квантовой и классической теориям, для больших квантовых чисел найдем

$$R^2 = \frac{2n}{\gamma}. \tag{17}$$

Как уже отмечалось, рассматриваемая система является квазиклассической. Поэтому уровни энергии должны быть эквидистантны с точностью до членов порядка $\hbar^2$. Разлагая (16) по $\hbar$, найдем

$$\omega_n^{n\mp s} = \frac{s\omega_0}{\Delta} \pm \delta\omega_s, \quad \delta\omega_s = \frac{\hbar s^2 \omega_0^3 n_E^2}{2\sqrt{1-k^2}\, eH_c\Delta^3}, \tag{18}$$

где верхний знак соответствует переходам с испусканием, а нижний — с поглощением кванта соответствующей частоты.

Если электрон в начальном состоянии обладает конечным временем жизни τ, то вероятность вынужденных переходов в единицу времени из состояния с энергией E_n в состояние $E_{n'}$ определяется выражением

$$W_{n,n'}(\mathbf{n}, \omega, \lambda) = 2\pi \left(\frac{e_0}{m\hbar\omega}\right)^2 |\mathbf{e}^{(\lambda)} \mathbf{P}_{n,n'}|^2 g_{n,n'}(\omega)\, u_{\mathbf{n},\lambda}(\omega), \tag{19}$$

где $\mathbf{e}^{(\lambda)}$ — вектор поляризации плоской электромагнитной волны частоты ω, падающей в направлении $\mathbf{n}$, $u_{\mathbf{n},\lambda}$ (ω) — спектральная плотность энергии внешнего излучения,

$$g_{n,n'}(\omega) = \frac{4\tau}{4\tau^2 (\omega - \omega_n^{n'})^2 + 1}, \tag{20}$$

а

$$\mathbf{P}_{n,n'} = \int \psi_{n'}^* e^{\mp i \frac{\omega}{c} \mathbf{nr}} \left(-i\hbar\nabla + \frac{e_0}{c}\mathbf{A}\right)\psi_n d^3x. \tag{21}$$

Вычисляя матричные элементы (21) с помощью волновых функций (14), найдем

$$(P_{n,n'})_x = BNN' e^{-i\alpha} \left\{ \left[\frac{k(E_n - ckp_x)}{c(1-k^2)} + \frac{e_0 H \sin\delta}{cq\sqrt{2\gamma}} (n - n' + q^2) \right] I_{n,n'}(q^2) - \right.$$

$$\left. - i \frac{2e_0 Hq}{c\sqrt{2\gamma}} \cos\delta I'_{n,n'}(q^2) \right\}. \tag{22}$$

$$(P_{n,n'})_y = BNN'\hbar e^{-i\alpha} \left\{ \frac{n - n' + q^2}{q^2} \cos\delta I_{n,n'}(q^2) - 2iq \sin\delta I'_{n,n'}(q^2) \right\},$$

$$(P_{n\,n'})_z = BNN' p_z e^{-i\alpha} I_{n,n'}(q^2).$$

Здесь введены обозначения

$$B = \delta_{p'_x, p_x - \frac{\hbar\omega}{c} n_x} \cdot \delta_{p'_z, p_z - \frac{\hbar\omega}{c} n_z}, \quad q = \frac{\omega n_E}{c\sqrt{2\gamma}}, \quad \cos\delta = \frac{n_y}{n_E}, \tag{23}$$

$$\sin\delta = \frac{k - n_x}{n_E\sqrt{4 - k^2}}, \quad \alpha = \frac{\omega n_y}{2c\gamma\hbar\sqrt{1-k^2}} \left[\left(2p_x - \frac{\hbar\omega}{c} n_x\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{E_n + E_{n'}}{c} k \right] - (n - n')\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right),$$

$I_{n,n'}(x)$ — функция Лагерра, определенная в [11].

Под влиянием внешнего электромагнитного поля излучения электрон будет поглощать и излучать фотоны. Реально наблюдаемой величиной является суммарная мощность, излучаемая (или поглощаемая) электроном в результате обоих процессов:

$$P^{\text{инд}}(\mathbf{n}, \omega, \lambda) = \sum_s \hbar\omega (W_{n,n-s} - W_{n,n+s}). \tag{24}$$

Если это выражение положительно, то система работает как лазер или мазер.

Рассмотрим несколько практически наиболее интересных случаев. Пусть в направлении оси x распространяется монохроматическая волна линейно-поляризованная вдоль оси y. Подставляя в (24) выражения

(19)—(23) и используя для аппроксимации матричных элементов формулу [12]

$$I_{n,n'}(x) = J_{n-n'}(\sqrt{2x(n+n'+1)}), \tag{25}$$

для мощности индуцированного излучения найдем выражение, не зависящее от t:

$$P_1^{\text{инд}} = \sum_s \frac{16\pi e_0^2 \sqrt{1-\beta_0^2}\, \tau u_{\mathbf{n}_{x,2}}(\omega)}{m\sqrt{1-k^2}\,(1+x_s^2)} \frac{\omega_0^2 s}{\Omega\omega} \left\{ z_1 \left(1 - \frac{s^2}{z_1^2}\right) J_s(z_1) J_s'(z_1) + \right.$$

$$\left. + \eta_0^2 J_s'^2(z_1) + \frac{2\tau x_s s\omega_0 \eta_0^2}{\Delta(1+x_s^2)} J_2'^2(z_\perp)\right\}. \tag{26}$$

Здесь

$$z_1 = \frac{\omega R}{c}\sqrt{\frac{1-k}{1+k}},\quad \eta_0 = \frac{\omega_0 R}{c\sqrt{1-k^2}},\quad \Delta = 1-k,\quad x_s = 2\tau\left(\omega - \frac{s\omega_0}{\Delta}\right).$$

Аналогично для монохроматической волны, распространяющейся вдоль оси y и линейно-поляризованной вдоль оси x, получим

$$P_2^{\text{инд.}} = \sum_s \frac{16\pi e_0^2 \sqrt{1-\beta_0^2}\; \tau u_{\mathbf{n}_{y,1}}(\omega)}{m\sqrt{1-k^2}\,(1+x_s^2)} \frac{\omega_0^2 s}{\Omega\omega} \left\{\left[z_2 \left(1 - \frac{s^2}{z_2^2}\right) J_s(z_2) J_s'(z_2) + \right.\right.$$

$$\left. + \eta_0^2 J_s'^2(z_2) + \frac{2\tau x_s s\omega_0 \eta_0^2}{1+x_s^2} J_s'^2(z_2)\right] + k^2(1-k^2)\,\frac{\Omega^2}{\beta_E^2\omega_0^2} \times$$

$$\times \left[\left(1 - \frac{s\omega_0}{\omega}\right)^2 \left(-z_2 J_s(z_2) J_s'(z_2) + \frac{2\tau x_s s\omega_0\eta_0^2}{1+x_s^2} J_s^2(z_2) + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \eta_0^2 J_s^2(z_2)\right) + \left(\frac{s^2\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{s\omega_0}{\omega}\right)\frac{z_2^2}{s^2} J_s^2(z_2)\right]\right\}, \tag{27}$$

где

$$z_2 = \frac{\omega R}{c\sqrt{1-k^2}},\quad \Delta = 1.$$

При $k=0$ и малых $\eta \equiv \beta_{0\perp}$ (26), (27) переходят в формулу, полученную в [3] при значении угла $\theta = \frac{\pi}{2}$. В этом случае усиление внешнего излучения возможно только при нарушении резонанса в небольшой области частот $\omega > \Omega$. В однородном магнитном поле ($k=0$) и релятивистских энергиях электрона возможно резонансное усиление на высших гармониках, так как область частот, где $P^{\text{инд}} > 0$, включает частоту $s\Omega$, $s \gg 1$.

Из (26) и (27) видно, что при $1-k^2 \ll 1$ резонансное усиление сохраняется как при релятивистских, так и нерелятивистских энергиях электрона. А так как частота ω_0 стремится к нулю при $k \to 1$, усиливаемые частоты на самом деле будут невелики.

В слаборелятивистском случае ($\beta_0 \ll 1$, $k \ll 1$) излучается только основная частота. Поэтому выражения (26), (27) можно с точностью до k^2 привести к виду

$$P_{1,2}^{\text{инд}}(\omega) = -\frac{e_0^2 \mathbf{E}^2 \Omega \tau}{m\omega(1 + x_{1,2}^2)} \left[1 - \eta_0^2 \frac{2\tau \Omega x_{1,2}}{1 + x_{1,2}^2} \right], \tag{28}$$

где $x_1 = 2\tau \left(\omega - \dfrac{\Omega}{1-k} \right)$, $x_2 = 2\tau(\omega - \Omega)$, а $\mathbf{E}$ — вектор электрической напряженности внешней электромагнитной волны.

При $k=0$ (28) переходит в формулу Шнейдера [3], так как $\eta_0^2 \equiv \beta_{0\perp}^2$. Если же выполняются условия $\beta_{0\perp}^2 \ll k^2 \ll 1$, то $\eta_0^2 \approx k^2$ и второй член в квадратных скобках (28) в $\dfrac{k^2}{\beta_{0\perp}^2}$ раз больше соответствующего члена в [3]. Следовательно, условия возникновения мазерного эффекта в скрещенных полях менее жестки, чем в однородном магнитном поле.

Таким образом, взаимодействие электронов, движущихся в скрещенных полях с электромагнитной волной, приводит к увеличению энергии волны в довольно широкой области частот, как при релятивистских, так и нерелятивистских энергиях электронов.

В заключение авторы выражают благодарность участникам семинара проф. А. А. Соколова за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алферов Д. Ф., Башмаков Ю. А., Бессонов Е. Г. ЖТФ, **42**, 1921, 1972.
2. Гинзбург В. Л. Краткие сообщения по физике, № 2, 40, 1972.
3. Schneider J. Phys. Rev. Lett., **2**, 504, 1959.
4. Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлпатов В. К. «Изв. вузов», радиофизика, **10**, 1414, 1967.
5. Соколов А. А., Тернов И. М. ДАН СССР, **166**, 1332, 1966.
6. Тернов И. М., Халилов В. Р. «Изв. вузов», физика, № 5, 43, 1967.
7. Альфвен Х. Космическая электродинамика. М., 1952.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1948.
9. Багров В. Г. Докторская диссертация. М., 1969.
10. Schwinder J. Phys. Rev., **75**, 1912, 1949.
11. Синхротронное излучение. Сб. статей под ред. А. А. Соколова, И. М. Тернова. М., 1966.

Поступила в редакцию
14.9 1972 г.

Кафедра
теоретической физики