$$|\Psi| e^{\delta\tau} \sin\left(\sum_1^n \varphi - \sum_1^m \psi\right) + |\Theta| \sin\left(\sum_1^n \varphi + \omega\tau - \sum_1^l \vartheta\right) = 0,$$

$$(\Phi_r \Psi_j - \Phi_j \Psi_r) e^{\delta\tau} + (\Phi_r \Theta_j - \Phi_j \Theta_r) \cos\omega\tau - (\Phi_r \Theta_r + \Phi_j \Theta_j) \sin\omega\tau = 0.$$

Асимптотика при $\delta \to \infty$ совпадает с правой асимптотикой траекторий корней уравнения (2) и определяется уравнениями (8—11). При $\delta \to -\infty$ асимптоты соответствуют асимптотам уравнения

$$\Phi_n(p) e^{p\tau} + \rho\Theta_l(p) = 0.$$

Ими являются горизонтальные прямые, определяемые из $\omega\tau = N\pi$.

Подобные же результаты получаются и при тождественном равенстве нулю других полиномов. При $\Theta_l(p) \equiv 0$ набор горизонтальных асимптот тоже слева, а при $\Phi_n(p) \equiv 0$ или $\Psi_m(p) \equiv 0$ — справа.

Траектории корней уравнения

$$p(p+3)(p+13)(p^2+10p+41)[(p+10)^2 e^{p\tau} + \sigma] + \rho(p+10)^2 = 0,$$

соответствующего уравнения (2), при $\Psi \equiv 0$ представлены на рис. 2 (параметр семейства $\sigma = 0{,}01$).

Таким образом, изложенное является обобщением полученных ранее результатов для систем без запаздывания [2] и одноконтурных систем с запаздыванием с коэффициентом усиления в качестве свободного параметра [1]. Одна из существенных особенностей корневых годографов уравнения (2) — возможность присутствия бесконечного количества начальных и предельных точек в конечной по δ области комплексной плоскости p. Асимптотика траекторий корней уравнения (2) есть совокупность асимптотик указанных двух случаев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бендриков Г. А., Конев Ф. Б. «Автоматика и телемеханика», № 4, 1969.
2. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., 1964.

Поступила в редакцию
4.6 1973 г.

Кафедра
физики колебаний

УДК 530.145

А. Б. КУКАНОВ, Н. Д. НАУМОВ

ПЕРЕМЕННЫЙ ЗАРЯЖЕННЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР В НЕСТАЦИОНАРНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

В последнее время нестационарные задачи квантовой механики [1—5] и квантовой электродинамики [6—8] стали предметом тщательного исследования. Настоящая работа посвящена нахождению явного вида функции Грина переменного пространственного осциллятора, помещенного в нестационарное электромагнитное поле

$$\mathbf{E}(t) = \{0,\ E_2(t),\ E_3(t)\}, \quad \mathbf{H}(t) = \{0,\ 0,\ H(t)\},$$

и некоторым ее применениям. Потенциалы поля зададим в виде

$$\mathbf{A} = \frac{H_0}{2} f(t) \{-y,\ x,\ 0\}, \quad \varphi = -E_2(t)\, y - E_3(t)\, z. \tag{1}$$

Функцию $f(t)$ и компоненты электрического поля $E_2(t)$ и $E_3(t)$ зададим следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \leqslant t'; \\ \dfrac{H}{H_0} & t \to \infty; \end{cases} \qquad \begin{matrix} E_i(t) = \\ i = 2,\ 3 \end{matrix} \begin{cases} E_{i0} & t \leqslant t', \\ E_i & t \to \infty. \end{cases} \tag{2}$$

Предположения о том, что поля $H(t)$, $E_2(t)$ и $E_3(t)$ изменяются от значений H_0, E_{20}, E_{30} в момент $t=t'$ до значений H, E_2, E_3 при $t\to\infty$, очевидно, не скажутся на общности полученных результатов. В отношении заряженного осциллятора мы предположим, что он имеет равные переменные частоты колебаний $\omega_\perp(t)$ вдоль осей x и y и частоту колебаний $\omega_3(t)$ вдоль оси z. Функция Грина $D(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \widehat{H}\Psi \tag{3}$$

с гамильтонианом

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 + \frac{\hbar}{i}\omega\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{m_0}{2}\left[\Omega^2(x^2+y^2) + \omega_3^2 z^2\right] + $$
$$+ e_0 E_2(t)\, y + e_0 E_3(t)\, z \tag{4}$$

по переменным $\mathbf{r}$, t должна, очевидно, удовлетворять уравнению Шредингера и условию

$$\lim_{t\to t'} D(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{5}$$

Здесь

$$\Omega^2 = \omega^2 + \omega_\perp^2(t), \qquad \omega = \omega_H f(t), \qquad \omega_H = \frac{e_0 H_0}{2m_0 c},$$

$-e = e_0 > 0$, m_0 — масса частицы. Ясно, что функция Грина $D(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ разбивается на произведение двух функций

$$D_\perp \cdot D_3 = D_\perp(\rho, t; \rho', t')\, D_3(z, t; z', t').$$

D_3 — функция Грина осциллятора с переменной частотой $\omega_3(t)$, находящегося под действием переменной силы, найдена в [1]. Будем искать $D_\perp$ в виде

$$D_\perp(\rho, t; \rho', t') = D_0 \exp\left\{\frac{i}{2\hbar}(ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + g)\right\}, \tag{6}$$

где a, b, c, d, g — функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (3) и учитывая условие (5), а также очевидное требование совпадения (6) с известным выражением для функции Грина в стационарном случае (см., например, [9]), находим окончательно

$$D_\perp(\rho, t; \rho', t') = \frac{m_0}{2\pi i\hbar\xi_1}\exp\left\{\frac{im_0}{2\hbar\xi_1}\left[(x^2+y^2)\dot{\xi}_1 + \xi_2\left[(\nu+x')^2 + (\mu+y')^2\right] + \right.\right.$$
$$+ 2(\mu\sin u - \nu\cos u + y'\sin u - x'\cos u)\, x -$$
$$- 2(\mu\cos u + \nu\sin u + y'\cos u + x'\sin u)\, y -$$
$$\left.\left. - 2\xi_1\left(x's + y'\rho + \frac{1}{m_0}\int_{t'}^{t}\xi_2 F\sin u\cdot\nu dt + \frac{1}{m_0}\int_{t'}^{t}\xi_2 F\cos u\cdot\mu dt\right)\right]\right\}. \tag{7}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mu = \frac{1}{m_0}\int_{t'}^{t}\xi_1 F\cos u dt; \qquad \nu = \frac{1}{m_0}\int_{t'}^{t}\xi_1 F\sin u\, dt, \tag{9}$$

$$\rho = \frac{1}{m_0}\int_{t'}^{t}\xi_2 F\cos u dt; \qquad s = \frac{1}{m_0}\int_{t'}^{t}\xi_2 F\sin u dt, \tag{9}$$

$$u = \int_{t'}^{t}\omega dt = \omega_H\int_{t'}^{t} f(t)\, dt; \qquad F = e_0 E_2(t), \tag{10}$$

ξ_1 и ξ_2 — два линейно-независимых решения уравнения $\ddot{\xi} + \Omega^2 \xi = 0$, удовлетворяющих условиям [1]

$$\xi_1 = 0, \quad \dot{\xi}_1 = 1, \quad \xi_2 = 1, \quad \dot{\xi}_2 = 0 \quad \text{при} \quad t = t'.$$

Рассмотрим движение гауссовского пакета. Гауссовский пакет зададим в виде

$$\Psi_\perp(\rho', 0) = C \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(x'p_1 + y'p_2) - \frac{\lambda m_0}{2\hbar}\left[(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2\right]\right\}, \tag{11}$$

где λ — некоторая константа, имеющая размерность частоты. В любой момент времени $t > 0$

$$\Psi_\perp(\rho, t) = \int D_\perp \Psi_\perp(\rho', 0)\, d\rho'. \tag{12}$$

Если воспользоваться (7) и (11), то нетрудно найти $\Psi_\perp(\rho, t)$ и показать, что $\Psi^*_\perp(\rho, t)\,\Psi_\perp(\rho, t)$ имеет вид

$$\Psi^*_\perp \Psi_\perp = \frac{C^2}{\xi_1^2 \lambda^2 + \xi_2^2} \exp\left\{-\frac{\lambda m_0}{\hbar(\xi_1^2 \lambda^2 + \xi_2^2)}\left[(x - x_{\text{кл}})^2 + (y - y_{\text{кл}})^2\right]\right\}, \tag{13}$$

где $x_{\text{кл}} = x_{\text{кл}}(t)$, $y_{\text{кл}} = y_{\text{кл}}(t)$ — классический закон движения частицы. Хотя ширина гауссовского пакета является функцией времени, его центр тяжести движется по классической траектории. Прямым расчетом можно убедиться в том, что $D_\perp \sim \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_{\text{кл}}\right]$, где $S_{\text{кл}} = \int\limits_{t'}^{t} L dt$ — классическое действие системы. В случае постоянных частот осциллятора, помещенного в стационарные внешние поля, мы должны положить

$$\Omega = \sqrt{\omega_H^2 + \omega_\perp^2}, \qquad \xi_1 = \Omega^{-1} \sin \Omega\tau, \qquad \xi_2 = \cos \Omega\tau.$$

Полагая далее

$$\omega_\pm = \Omega \pm \omega_H, \quad u = \omega_H \tau, \quad \tau = t - t',$$

найдем из (7)

$$D_\perp = \frac{m_0 \Omega}{2\pi i \hbar \sin \Omega\tau} \exp\left\{\frac{i m_0 \Omega}{2\hbar \sin \Omega\tau}\left[(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2) \times \right.\right.$$
$$\times \cos \Omega\tau - 2(xx' + yy') \cos \omega_H \tau - 2(x'y - y'x) \sin \omega_H \tau +$$
$$+ \frac{2F}{m_0 \omega_\perp^2}\left(\sin \omega_H \tau - \frac{\omega_H}{\Omega} \sin \omega\tau\right)(x - x') + \frac{2F}{m_0 \omega_\perp^2}(\cos \Omega\tau - \cos \omega_H \tau) \times$$
$$\left.\left. \times \left(y + y' + \frac{F}{m_0 \omega_\perp^2}\right)\right] + \frac{iF^2}{2\hbar m_0 \omega_\perp^2}\tau\right\}. \tag{14}$$

Выражение (14) используем для нахождения спектра энергии системы в стационарном случае. Для этого найдем сначала шпур $TrD^*_\perp$ [10]:

$$TrD^*_\perp = \int D^*_\perp(x, y; x, y; \tau)\, dx dy = \frac{\exp\left\{-\frac{iF^2\tau}{2\hbar m_0 \omega_\perp^2}\right\}}{2(\cos \Omega\tau - \cos \omega_H \tau)} =$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} e^{i\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\omega_+ \tau} \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{i\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\omega_- \tau}\, e^{-\frac{iF^2\tau}{2\hbar m_0 \omega_\perp^2}}. \tag{15}$$

Разлагая $TrD^*_\perp$ в ряд Фурье, найдем

$$G_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int d\tau e^{-i\omega\tau}\, Tr\, D^*_\perp =$$

$$= \sum_{n_1, n_2} \delta\left(\omega - \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\omega_+ - \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\omega_- + \frac{F^2}{2\hbar m_0 \omega_\perp^2}\right). \quad (16)$$

Отсюда находим спектр собственных значений системы

$$E^\perp_{n_1, n_2} = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\omega_+ \hbar + \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\omega_- \hbar - \frac{F^2}{2m_0\omega_\perp^2}. \quad (17)$$

Некоторые вопросы теории заряженного осциллятора, помещенного в постоянное внешнее поле, рассмотрены в [12].

В заключение авторы благодарят проф. А. А. Соколова за обсуждение изложенных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Husimi K., Progr. Theoreth. Phys., **9**, 381, 1953.
2. Попов В. С., Переломов А. М. ЖЭТФ, **56**, 1375, 1969.
3. Попов В. С., Переломов А. М. ЖЭТФ, **57**, 1684, 1969.
4. Малкин И. Н., Манько В. И. ЖЭТФ, **59**, 1746, 1970.
5. Малкин И. А., Манько В. И. «Теоретическая и математическая физика», **6**, 71, 1971.
6. Brezin E. These Applications de l'approximation classique en electrodynamique quantique, Paris, 1970.
7. Попов В. С. ЖЭТФ, **61**, 1334, 1971.
8. Попов В. С. «Ядерная физика», **15**, 1271, 1972.
9. Куканов А. Б., Наумов Н. Д. «Изв. вузов», физика, 1973.
10. Blinder S. M. International journal of quantum chemistry, **1**, 285, 1967.
11. Дубнер В. М. «Изв. вузов», физика, № 4, 167, 1966.
12. Тернов И. М., Багров В. Г., Задорожный В. Н. «Изв. вузов», физика, № 4, 86, 1971.

Поступила в редакцию
29.8 1972 г.

Кафедра
теоретической физики

УДК 530.12 : 531.51

В. Б. БРАГИНСКИЙ, Д. Д. СОКОЛОВ

О КОГЕРЕНТНЫХ ПОНДЕРОМОТОРНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ СИЛАХ

Как известно, для уверенного обнаружения гравитационного излучения было бы весьма желательно провести опыт, аналогичный опыту Г. Герца. Однако рассмотренные схемы такого эксперимента в лабораторных условиях лежат в настоящее время за пределами современных технических возможностей. В этой работе обсуждается эффект, который в принципе позволяет обнаружить гравитационную радиацию источника без непосредственного приема излучения по реакции источника на излучение. Рассмотрим два когерентных источника гравитационных волн мощности N и частоты ϖ в виде колеблющихся гантелей. Пусть источники находятся друг от друга на расстоянии, много меньшем длины волны излучения. Суммарная мощность излучения при определенных фазовых соотношениях будет в силу когерентности не $2N$, а $4N$. Естественно поэтому, что на источники действует сила радиационного давления, равная N/c. Аналогично можно получить и действующий на источники вращающий момент. Действительно, по формуле Дж. Вебера [1] на частицу в гравитационной волне действует сила $f_j \sim r_k R_{okoj}$ и, следовательно, момент силы $M \sim \left[\frac{r}{(1)}\mathbf{f}\right]$. После