Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1974

Д. А. СЛАВНОВ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПУАНКАРЕ В СЕМИМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Показано, что, если в пространстве Минковского для полного задания положения точки помимо обычных координат ввести еще единичный времениподобный вектор, то можно построить такие координаты τ и $\mathbf{x}$, что при преобразованиях Пуанкаре они будут преобразовываться независимо, причем τ испытывает одномерные сдвиги, а $\mathbf{x}$ — трехмерные вращения и сдвиги.

До недавнего времени квантовую теорию поля было принято рассматривать как релятивистское обобщение метода вторичного квантования квантовой механики [1]. Однако дальнейшее развитие квантовой теории поля показало, что введение в нее таких основных понятий квантовой механики, как гамильтониан, уравнение Шредингера, канонические перестановочные соотношения встречают значительные трудности [2 и 3].

В перечисленных понятиях квантовой механики существенную роль играет введение некоторых пространственно-подобных гиперплоскостей. Попытки введения в квантовую теорию поля гиперплоскостей предпринимались не раз. Можно, например, указать работу Дирака [4]. Обычно введение гиперплоскостей рассматривается как вспомогательный прием, и теорию стремятся построить так, чтобы в окончательные результаты они не входили. Можно, однако, считать вводимые гиперплоскости реальной характеристикой явления, такой же, как, например, время или координата. В этом случае, очевидно, должно претерпеть изменение понятие релятивистской инвариантности, поскольку переход от одной системы координат к другой сопряжен не только с преобразованием самих координат, но и с преобразованием введенной гиперплоскости.

Изменение понятия релятивистской инвариантности, вообще говоря, весьма желательно. Это связано с тем, что теорема Хаага [2, 3] утверждает, что весьма широкий класс теорий, включающий и те, с помощью которых рассчитывались конкретные эффекты, не совместим с обычным понятием релятивистской инвариантности.

Будем различать точки в пространстве-времени не только по их координатам (пространственным и временным), но и по тому, на какой гиперплоскости (пространственноподобной) лежит та или иная точка.

Таким образом, для полного описания положения точки необходимо задать семь координат: одну временную (x^0), три пространственные (x^1, x^2, x^3) и три независимые составляющие единичного вектора нормали к гиперплоскости. Этот вектор нормали мы обозначим через n ($(n, n) = 1$). Метрический тензор у нас такой, что $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$.

Пусть при преобразовании Пуанкаре (a, Λ) координаты x и n преобразуются следующим образом:

$$x \to x' = \Lambda x + a, \tag{1}$$

$$n \to n' = \Lambda n. \tag{2}$$

Лоренцевский поворот Λ представим в виде произведения двух поворотов

$$\Lambda = DL(u), \tag{3}$$

где матрица D имеет вид

$$D_0^i = D_i^0 = \delta_{i0}, \quad D_\beta^\alpha = -d_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

причем

$$\sum_\beta d_{\alpha\beta} d_{\gamma\beta} = \sum_\beta d_{\beta\alpha} d_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}. \tag{5}$$

В формуле (4) и везде в дальнейшем латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, а греческие 1, 2, 3. Матрица $L(u)$ имеет вид

$$L_0^0 = u^0, \quad L_\alpha^0 = L_0^\alpha = -u^\alpha, \tag{6}$$
$$L_\beta^\alpha = \delta_{\alpha\beta} + (1 + u^0)^{-1} u^\alpha u^\beta.$$

Смысл этих преобразований следующий: $L(u)$ дает переход к системе, движущейся поступательно относительно первоначальной с четырех-скоростью u; D — чистый пространственный поворот. Ясно, что при подходящем выборе вектора u и матрицы D любой лоренцевский поворот можно представить в виде (3). Именно

$$u_j = g_{jj} u^j = \Lambda_j^0, \tag{7}$$

т. е., зная Λ_j^i, мы однозначно строим u и тем самым $L(u)$. Матрица D по заданному Λ строится так:

$$D = \Lambda L^{-1}(u). \tag{8}$$

Мы считаем, что положение точки в пространстве задается координатами x и n. Построим некоторые другие величины, которые также однозначно характеризуют положение точки в семимерном пространстве. Для этой цели введем четыре единичных вектора с проекциями

$$e_i(0) = \{\delta_{i0}, \ \delta_{i1}, \ \delta_{i2}, \ \delta_{i3}\}. \tag{9}$$

Далее построим векторы $e_i(n)$ по формуле

$$e_i(n) = L^{-1}(n)\, e_i(0). \tag{10}$$

С помощью векторов $e_i(n)$ образуем величины

$$\tau = (e_0(n), \ x), \quad z_\alpha = (e_\alpha(n), \ x). \tag{11}$$

Вектор x через τ и z_α выражается следующим образом:

$$x = \tau e_0(n) - \sum_\alpha z_\alpha e_\alpha(n). \tag{12}$$

т. е., мы можем описывать положение точки в пространстве с помощью τ, z_α, n. Соответствие этих величин с координатами x, n взаимно-однозначное (формулы (10)—(12)).

Выясним, как преобразуются величины τ и z_α при преобразованиях Пуанкаре (a, Λ). Прежде всего вместо трансляции a введем величины

$$t = (e_0(n'),\ a), \quad c_\alpha = (e_\alpha(n'),\ a). \tag{13}$$

Здесь n' дается формулой (2). Далее, непосредственной проверкой убеждаемся в выполнении следующих равенств:

$$L(Dn) = DL(n)D^{-1}, \tag{14}$$

$$L(L(u)n)L(u)L^{-1}(n) = A(u;\ n), \tag{15}$$

где A — матрица с компонентами

$$A^0{}_i = A^i{}_0 = \delta_{0i}, \tag{16}$$

$$A^\alpha{}_\beta = a_{\alpha\beta}(u;\ n) = \delta_{\alpha\beta} - 2(1+u^0)^{-1}(1+n^0)^{-1}u^\alpha n^\beta +$$
$$+ (1+(u,\ n))^{-1}(n^\alpha + u^\alpha(1+u^0)^{-1}(1-n^0))(u^\beta + n^\beta(1+n^0)^{-1}(1-u^0)).$$

Причем

$$\sum_\gamma a_{\gamma\alpha}a_{\gamma\beta} = \sum_\gamma a_{\alpha\gamma}a_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta}, \tag{17}$$

т. е. A — чистое пространственное вращение.

Величина τ при преобразовании (a, Λ) переходит в

$$\tau' = (e_0(n'),\ x') = (e_0(n'),\ \Lambda x) +$$
$$+ (e_0(n'),\ a) = (e_0(\Lambda n),\ \Lambda x) + t = \tau + t, \tag{18}$$

а z_α в

$$z'_\alpha = (e_\alpha(n'),\ x') = (e_\alpha(n'),\ \Lambda x) +$$
$$+ (e_\alpha(n'),\ a) = (e_\alpha(n'),\ \Lambda\tau e_0(n)) -$$
$$- \sum_\beta z_\beta(e_\alpha(n'),\quad \Lambda e_\beta(n)) + c_\alpha = \sum_\beta r_{\alpha\beta}z_\beta + c_\alpha, \tag{19}$$

где

$$-r_{\alpha\beta} = (e_\alpha(n'),\ \Lambda e_\beta(n) = (e_\alpha(0),$$
$$L(DL(u)n)DL(u)L^{-1}(n)e_\beta(0)) = (e_\alpha(0),\quad DAe_\beta(0)). \tag{20}$$

Подставляя для D и A их выражения через $d_{\alpha\beta}$ и $a_{\gamma\delta}$, получаем

$$r_{\alpha\beta} = \sum_\gamma d_{\alpha\gamma}a_{\gamma\beta}. \tag{21}$$

Таким образом, $r_{\alpha\beta}$ представляет собой вращение в трехмерном пространстве.

Окончательно получаем, что при преобразованиях Пункаре (a, Λ) координаты n, τ, z_α преобразуются следующим образом:

$$n \to n' = DL(u)\,n, \quad \tau \to \tau' = \tau + t,$$

$$z_\alpha \to z'_\alpha = \sum_\beta r_{\alpha\beta} z_\beta + c_\alpha. \tag{22}$$

Здесь, вообще говоря, величины t, c_α, $r_{\alpha\beta}$ зависят от n, u, $d_{\delta\gamma}$ и a, т. е. не только от параметров преобразования Пуанкаре, каковыми являются u, $d_{\delta\gamma}$, a, но и от координаты точки n.

Предположим, что все материальные объекты, окружающие нас, имеют одну и ту же координату n, т. е., мы имеем не семимерное пространство G, а его четырехмерное подпространство G_n. В этом случае величины t, c_α, $r_{\alpha\beta}$ будут для всех точек одинаковыми. Они будут определяться параметрами преобразования Пуанкаре, а величина n будет входить в них как параметр, одинаковый для всех точек. Вместо того чтобы задавать преобразования Пуанкаре величинами u, $d_{\delta\gamma}$, a, мы можем задать его непосредственно величинами u, $r_{\alpha\beta}$, t, c_α, которые и будем считать исходными.

Чтобы выразить преобразование (22) через эти величины, необходимо выразить через них первое из равенств (22). Для этой цели поступим следующим образом. Так как

$$d_{\alpha\beta} = \sum_\gamma r_{\alpha\gamma} a^{-1}_{\gamma\beta}, \tag{23}$$

то

$$D = RA^{-1} g, \tag{24}$$

где g — матрица метрического тензора, а R имеет компоненты

$$R^0_j = R^j_0 = \delta_{0j}, \quad R^\alpha_\beta = r_{\alpha\beta}. \tag{25}$$

Воспользовавшись формулами (15) и (24), получаем

$$DL(u)\,n = RA^{-1} gL(u)\,n =$$

$$= RL(n)\,L^{-1}(u)\,L^{-1}(L(u)\,n)\,gL(u)\,n = RL(n)\,u. \tag{26}$$

Таким образом, когда все точки лежат в одном пространстве G_n, преобразование Пуанкаре может быть задано матрицей вращения $r_{\alpha\beta}$ в пространстве координат z (три независимых параметра), трехмерным сдвигом c в пространстве z (три параметра), сдвигом t в пространстве τ (один параметр), единичным вектором u (три независимых параметра), определяющим преобразование в пространстве единичных векторов n.

При этом координаты точек преобразуются следующим образом:

$$n \to n' = RL(n)\,u, \tag{27}$$

$$z_\alpha \to z'_\alpha = \sum_\beta r_{\alpha\beta} z_\beta + c_\alpha,$$

$$\tau \to \tau' = \tau + t.$$

Из (27) видно, что величины $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2$ и $(\Delta \mathbf{z})^2 = (\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)^2$ являются инвариантами преобразования Пуанкаре, они выступают в той же роли, что промежуток времени между двумя событиями и расстояние между двумя точками в случае преобразования Галилея.

Преобразование (27) в некотором смысле даже проще галилеевского, так как в последнем преобразование пространственных координат связано со временем, а в преобразовании (27) «пространственные» координаты z и «временные» τ полностью разделены.

Пока мы имеем дело с классической (неквантовой) теорией координаты n, z, τ не отличаются принципиально от координат n и x, комбинациями которых они являются. Однако дело может измениться при переходе к квантовому случаю. Именно благодаря независимости преобразования «временной» координаты τ от «пространственной» z в релятивистской теории, сформулированной с помощью координат τ и z, должна оказаться возможной схема квантования, характерная для нерелятивистской теории. В частности, оказывается возможным ввести как представление Гейзенберга, так и представление Шредингера. В случае обычной квантовой теории поля последнего сделать нельзя. Кроме того, при введении для характеристики системы координат τ, z и n оказываются невыполненными условия теоремы Хаага, сводящей в настоящее время практически к нулю класс нетривиальных теорий в релятивистской квантовой механике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., 1963.
2. Стритер Р. Ф., Вайтман А. С. PCT, спин и статистика и все такое. М., 1966.
3. Haag R. Dan Mat. Fys. Medd., **29**, No. 12, 1955.
4. Dirac P. A. Revs. Mod. Phys., **21**, 392, 1949.

Поступила в редакцию
12.10 1972 г.

Кафедра
квантовой статистики