Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1974

УДК 530.12

В. Н. ПОНОМАРЕВ

ДВИЖЕНИЕ ПРОБНЫХ БЕССПИНОВЫХ ТЕЛ В ЗАДАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ С КРУЧЕНИЕМ

В работе исследуется проблема геодезических линий пробных бесспиновых тел в пространствах с кручением. Показывается, что тензор кручения может оказать влияние на уравнения геодезических линий. Из сравнения полученных результатов с экспериментальными данными, касающимися классических эффектов общей теории относительности, получена верхняя граница для компонентов тензора кручения.

1. Согласно общей теории относительности, сформулированной Эйнштейном в 1916 г., пространство-время является (псевдо)римановым 4-мерным многообразием. Его геометрия определяется метрическим тензорным полем $g_{\mu\nu}$ вместе с метрической линейной связностью $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$.

Последнее время появилось много обобщений эйнштейновской теории гравитации. Теория Ердана, Бранса, Дикки [1] и др. привлекла наибольшее внимание. К. Торн с сотрудниками предпринял систематическое изучение метрических теорий (т. е. таких, в которых принят постулат ковариантного постоянства метрики) [2]. Их предсказания анализировались и сравнивались с предсказаниями старой (эйнштейновской) теории, а также с экспериментальными результатами.

С нашей точки зрения, наиболее простым и естественным обобщением теории Эйнштейна является теория, основанная на предположении, что антисимметричная часть связности нулю не равна, т. е. $Q^{\lambda\,\text{опр}}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}) \neq 0$, где $Q^{\lambda}_{\mu\nu}$ является тензором кручения.

Такая возможность была впервые рассмотрена Е. Картаном в 1922 г. [3]. Он предложил в качестве модели пространства-времени 4-мерное дифференцируемое многообразие с метрическим тензором и метрической несимметричной линейной связностью.

Согласно Картану [4], тензор кручения связан с плотностью внутреннего углового момента импульса. Очень важно, что уравнения поля в пустоте совпадают с вакуумными уравнениями Эйнштейна. Подобные идеи были выдвинуты и развиты, в частности, в работах [5—10].

В пользу связи кручения с внутренним угловым моментом импульса можно привести следующий аргумент (см. [10]): с помощью теорем голономности кривизна и кручение связаны соответственно с группами однородных трансформаций Лоренца и трансляций в касательном пространстве к многообразию.

В приближении специальной теории относительности группа Пуанкаре и ее инварианты (масса и спин) играют фундаментальную роль в описании физических явлений. В эйнштейновской теории масса влияет на кривизну, но спин не имеет подобного динамического эффекта. Вводя кручение и связывая его со спином, получим интересную цепочку между теорией гравитации и специальной теорией относительности [10]:

$$\text{лоренцовские вращения} \rightarrow \text{спин} \xrightarrow{\text{(Картан)}} \text{кручение} \rightarrow \text{трансляции}$$

$$\text{трансляции} \rightarrow \text{энергия импульс} \xrightarrow[\substack{\text{ОТО}\\ \text{(Эйнштейн)}}]{} \text{кривизна} \rightarrow \text{лоренцовские вращения}$$

2. Оставим в стороне вопрос о связи кручения со спином и ограничимся рассмотрением геометрии геодезических. Поскольку мы будем рассматривать геодезические пробных тел в заданном гравитационном поле с кручением, то нас не интересует, откуда появилось кручение. А потому возражения такого рода, что не имеет смысла рассматривать влияние кручения (из-за связи кручения с внутренним угловым моментом импульса) на движение бесспиновых частиц (см. [11]), кажутся нам необоснованными.

Покажем, что в принципе тензор кручения может оказать влияние на геодезические линии, в отличие от часто встречающейся ошибки: «пока мы будем рассматривать геометрию геодезических, достаточно рассматривать пространства без кручения» (см. [12] стр. 315—316). Ясно, что связность $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ определяет те же самые геодезические, что и ее симметричная часть $\Gamma^{\lambda}_{(\mu\nu)}$. Однако на многообразии с метрическим полем $g_{\mu\nu}$ связность однозначно определяется кручением и полем $\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu}$. $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, вообще говоря, отличаются от символов Кристоффеля, сконструированных из $g_{\mu\nu}$.

Конкретно нам надо оценить эффект кручения на движение перигелия планетных орбит и на искривление лучей света, проходящих вблизи Солнца [13]. Для этого предположим, что связность является метрической, $\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = 0$; мы будем предполагать некоторую специальную форму тензора кручения; будем также предполагать, что гравитационное поле Солнца представлено обычной метрикой Шварцшильда.

3. Линейная связность $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ риманового пространства-времени в общей теории относительности однозначно характеризуется:

$$\text{свойством симметрии } \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}, \tag{1а}$$

$$\text{условием метричности } \nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = 0, \tag{1б}$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор, а ∇ обозначает ковариантную производную относительно $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$.

Из (1) следует, что коэффициенты связаности совпадают с символами Кристоффеля второго рода

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}). \tag{2}$$

Если мы будем решать (1б) относительно $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, но без свойства симметрии (1а), то получим

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} + Q^{\lambda}_{\mu\nu} + 2Q_{(\mu\nu)}{}^{\lambda}. \tag{3}$$

Разбиваем тензор кручения $Q^{\lambda}_{\mu\nu}$ на неприводимые части

$$Q^{\lambda}_{\mu\nu} = \widetilde{Q}^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{1}{3} (\delta^{\lambda}_{\nu} Q_{\mu} - \delta^{\lambda}_{\mu} Q_{\nu}) + \sqrt{-g}\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \breve{Q}^{\rho} g^{\sigma\lambda},$$

где $\widetilde{Q}^{\lambda}_{\mu\nu}$ — бесследовая часть тензора кручения, $Q_{\nu} = Q^{\lambda}_{\nu\lambda}$ — след тензора кручения, $\breve{Q}^{\mu} = \frac{1}{3!\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} Q_{\nu\rho\sigma}$ — псевдослед тензора кручения.

Из уравнения (1б) следует, что собственное время s является аффинным параметром вдоль времениподобных геодезических. Поэтому вместо того, чтобы исходить непосредственно из принципа наименьшего действия, мы можем предположить уравнения геодезических частиц с массой как соответствующее обобщение уравнений геодезических в общей теории относительности:

$$\frac{D}{ds} \frac{dx^{\lambda}}{ds} = \frac{d^2 x^{\lambda}}{ds^2} + \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} +$$

$$+ 2\widetilde{Q}_{(\nu\mu)}{}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} - \frac{2}{3} Q^{\lambda} + \frac{2}{3} Q_{\mu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\lambda}}{ds} = 0. \tag{4}$$

Важно заметить, что псевдовекторная часть не входит в уравнения геодезических частиц с массой.

Схематично можно изобразить два пути обобщения уравнений теории Эйнштейна на случай с кручением:

$$\begin{array}{ccccc} \delta\int L(\nabla)\, d\omega & & \Leftrightarrow & & R_1(\nabla), \\ \downarrow & & & & \Downarrow \\ \delta\int L(\nabla, Q)\, d\omega & \leftrightarrow & R_2(\nabla, Q) & & R_1(\overline{\nabla}), \end{array}$$

где $L(\nabla)$ — эйнштейновский лагранжиан; $L(\nabla, Q)$ — лагранжиан, получающийся путем расширения эйнштейновского лагранжиана на случай с кручением; $R_1(\nabla)$ — уравнение геодезических в римановой геометрии, $R_1(\overline{\nabla})$ — уравнения, получающиеся из $R_1(\nabla)$ путем замены ковариантной производной относительно символов Кристоффеля на ковариантную производную относительно общих связностей, определенных в [3]. Уравнения R_2 и $R_1(\overline{\nabla})$ не эквивалентны, отсюда и варианты $\Rightarrow$ и $\rightarrow$ не эквивалентны. Вариант $\Rightarrow$ нам кажется более приемлемым.

Лагранжиановский формализм играет существенную роль в законах сохранения, которые сильно упрощают решение уравнений. Если уравнение движения может быть получено из инвариантного лагранжиана, то инвариантность уравнения движения всегда предполагает законы сохранения. Например, уравнения двух одномерных осцилляторов

$$m_1\ddot{x}_1 = \alpha(x_1 - x_2), \quad m_1\ddot{x}_1 = \alpha(x_2 - x_1)$$

могут быть получены из инвариантного лагранжиана и являются сами инвариантными относительно трансляций. Поэтому имеем закон сохранения:

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2) = 0.$$

Однако обратное положение справедливо не всегда. Пусть мы имеем уравнение движения, инвариантное относительно некоторой трансформации T, и пусть оно получается из лангранжиана, не являющегося инвариантным относительно этой трансформации. Тогда, если уравнение Эйлера—Лагранжа $[L]=0$ можно представить в виде $[L]\,\delta^+ q = Q^i_i$, то величина Q^i сохраняется. Если так представить нельзя, то закон сохранения, связанный с трансформацией T, не существует.

В общем случае уравнение (4) не может быть получено из вариационного принципа. Однако в нашем случае мы найдем законы сохранения, не выписывая с самого начала лагранжиан.

4. Хорошо известно, что законы сохранения тесно связаны с изометриями пространства-времени. Рассмотрим связь между изометриями и первыми интегралами уравнений геодезических в пространстве-времени с кручением. Изометрии многообразия с $g_{\mu\nu}$ определяются как изоморфизмы, сохраняющие $g_{\mu\nu}$. Векторное поле ξ^λ генерирует однопараметрическую группу изометрий, если производная Ли $g_{\mu\nu}$ относительно ξ^λ равна нулю, $\underset{\xi}{L} g_{\mu\nu} = 0$. В римановой геометрии последнее уравнение эквивалентно уравнению Киллинга $\xi_{(\mu;\nu)} = 0$, где точка с запятой обозначает ковариантную производную относительно символов Кристоффеля (2). Когда $Q^\lambda_{\mu\nu} \neq 0$, уравнения

$$\underset{\xi}{L} g_{\mu\nu} \equiv 2\nabla_{(\nu}\xi_{\mu)} + 4Q_{(\mu\nu)\lambda}\xi^\lambda = 0$$

и уравнения

$$\nabla_{(\nu}\xi_{\mu)} = 0 \tag{5}$$

больше не эквивалентны (∇ — ковариантная производная относительно $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$, определенных в (3)). С точки зрения законов сохранения уравнения (5) более важны, поскольку из уравнений (4) и (5) следует первый интеграл $\xi_\mu \frac{dx^\mu}{ds} = \text{const}$.

Выберем форму тензора кручения. Мы исследуем проблему движения частицы в сферически-симметричном гравитационном поле, для которого существует четыре независимых вектора Киллинга ξ^μ_i, $i=1, 2, 3, 4$. Предположим, что тензор кручения удовлетворяет следующим требованиям: а) $\underset{\xi_i}{L} Q^\lambda_{\mu\nu} = 0$, т. е. сохраняется статический характер и сферическая симметрия поля; б) бесследовая часть тензора кручения равна нулю, $\tilde{Q}^\lambda_{\mu\nu} = 0$; в) требуем существования тех же самых первых интегралов уравнений геодезических, что и в случае без кручения, т. е. векторы Киллинга метрики Шварцшильда будут удовлетворять уравнениям (5).

При этих предположениях уравнения геодезических (4) принимают вид

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + \frac{2}{3} \left(\frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\lambda} \right) Q_\mu = 0. \tag{6}$$

Вводим обычные сферические координаты ($x^0 \equiv t$, $x^1 \equiv v$, $x^2 \equiv \theta$, $x^3 \equiv \varphi$). Из условия а) следует, что $Q_\mu = (n(r),\ g(r),\ 0,\ 0)$, а из условия в) — $Q_\mu(r) = Q(r)_{,\mu} = (0,\ g(r),\ 0,\ 0)$.

Заметим, что уравнения геодезических (6) с $Q_\mu = (0, g(r), 0, 0)$ могут быть получены из принципа наименьшего действия с

$$w = -mc \int [1 + \Phi(r)]\, ds,$$

где $Q(r) = \ln[1 + \Phi(r)]$ удовлетворяют уравнению $g(r) = \frac{dQ(r)}{dr}$.

5. Рассмотрим движение перигелия планетных орбит [14]. Шварцшильдовский линейный элемент запишется в системе единиц $c=1$, $G=1$ (G — гравитационная константа).

$$ds^2 = e^{-\lambda} dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

где $e^{-\lambda} = 1 - 2\,m/r$.

Как следствие наших предположений, орбита планеты лежит в плоскости, в качестве которой мы можем выбрать плоскость $\theta = \pi/2$.

Уравнения движения (6) принимают вид

$$\frac{d^2t}{ds^2} - \lambda' \left(\frac{dr}{ds} \cdot \frac{dt}{ds} \right) + \frac{2}{3} g(r) \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dt}{ds} = 0, \tag{7а}$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} - \frac{\lambda'}{2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 e^{-2\lambda} + \frac{\lambda'}{2} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - re^{-\lambda} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \frac{2}{3} g(r) \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = 0, \tag{7б}$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{ds} \frac{dr}{ds} + \frac{2}{3} g(r) \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0, \tag{7в}$$

где $\lambda' = \frac{d\lambda}{dr}$.

Кроме системы (7) мы имеем условие

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 1. \tag{8}$$

Уравнение (7б) зависит от (7а), (7в), (8). Из уравнений (7а) и (7в) получим соответственно законы сохранения энергии и углового момента импульса:

$$e^{-\lambda + \frac{2}{3} Q} \left(\frac{dt}{ds} \right) = \mathrm{const},$$

$$r^2 e^{\frac{2}{3} Q} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) = J,$$

где J — угловой момент импульса.

Предполагая, что кручение мало и используя приближение $e^{\frac{2}{3}Q} = 1 + \frac{2}{3} Q$, после несложных вычислений получим уравнение

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{1}{P} - u + 3mu^2 - \frac{2}{3} J^{-2} \frac{dQ}{du}, \tag{9}$$

где $p = \frac{J^2}{m}$ — параметр ньютоновской орбиты, $u = \frac{1}{r}$.

Уравнение (9) мы решаем приближенно: $u = u_{\text{ньют}} + v$; $u_{\text{ньют}} = (1 + \epsilon \cos\varphi) \cdot \frac{1}{\rho}$ описывает ньютоновскую орбиту (ϵ — эксцентриситет), а v — малая поправка, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v = 3mu^2_{\text{ньют}} + \frac{2}{3} (J^{-2}) \left(\frac{g(u_{\text{ньют}})}{u^2_{\text{ньют}}}\right). \tag{10}$$

Движение перигелия на один оборот может быть подсчитано при предположении, что периодическая функция $k(\varphi) = \frac{2}{3} J^{-2} [g(u_{\text{ньют}})/u^2_{\text{ньют}}]$, которая является четной в φ, может быть разложена в ряд Фурье

$$k(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\varphi.$$

Так как нас интересует лишь только эффект, нарушающий замкнутый характер орбиты, соответствующий непериодической части решения уравнения (10), то достаточно сохранить в правой стороне единственно выражения, пропорциональные $\cos\varphi$. Итак, интересующее нас решение имеет вид

$$v = \left(\frac{3m\epsilon}{p^2} + a_1\right) \varphi \sin\varphi.$$

Это дает значение изменения перигелия орбиты на один оборот

$$\delta\varphi = \frac{6\pi m}{\rho} + \frac{\pi a_1 p}{\epsilon}.$$

Первый член представляет обычное общерелятивистское движение перигелия, в то время как вторая часть выражения соответствует изменению благодаря кручению.

Например, если $g(r) = \alpha r^{-2}$, то $a_1 = 0$, и единственный эффект кручения — медленное изменение значения параметра ρ. Для $g(r) = \beta r^{-3}$ получаем $a_1 = \frac{2\beta\epsilon}{3pJ^2}$.

Верхний предел значения a_1 может быть оценен сравнением наблюдаемого движения перигелия с общерелятивистским подсчетом. Для Меркурия [15] $(\delta\varphi_{\text{набл}} - \delta\varphi_{\text{теор}}) \leqslant 0{,}5''$ на столетие. Отсюда $|a_1| \leqslant 10^{-17}$ *км*$^{-1}$. Можно получить большее значение для верхней границы кручения, если, следуя Дикки [16], принять, что около $3{,}4''$ движения перигелия орбиты Меркурия происходит за счет сплющенности Солнца. Если $g(r) = \beta r^{-3}$, то $|\beta| \leqslant 0{,}3$ *км*^{2}.

6. Рассмотрим изотропные геодезические в пространстве с кручением. Предполагаем, что луч света удовлетворяет уравнениям геодезических

$$\frac{D}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=0,\quad g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=0,$$

где λ — параметр вдоль лучей света.

Нетрудно увидеть, что только бесследовая часть тензора кручения влияет на искривление лучей света.

При предположении, что $\widetilde{Q}^\lambda_{\mu\nu}=0$, уравнение (4) имеет вид

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda}+\begin{Bmatrix}\mu\\ \nu\rho\end{Bmatrix}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda}+\frac{2}{3}Q_\rho\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda}=0$$

и выражения $\frac{2}{3}Q_p\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ могут быть исключены из уравнений подходящим изменением параметра λ.

Подводя итог приведенным рассуждениям и вычислениям, отметим, что, изучая отклонение (вероятное) от наблюдаемого значения искривления лучей света, предсказываемого общей теорией относительности, мы будем в состоянии оценить бесследовую часть тензора кручения. С другой стороны, при помощи точных измерений движения перигелия планет можно получить информацию, касающуюся следа тензора кручения. Ясно, что никакие из этих наблюдений не могут быть источниками информации о псевдоследе тензора кручения, который не входит в уравнения геодезических.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brans C., Dicke R. Phys. Rev., **124**, 925, 1961.
2. Thorn K., Will G. Ap. I **163**, 595, 1971.
3. Cartan É. Comp. Rend., **174**, 593, 1922.
4. Cartan É. Ann. Ec. Norm., **40**, 325, 1923.
5. Sciama D. Proc. Camb. Phil. Soc., **54**, 72, 1958.
6. Родичев В. И. ЖЭТФ, **40**, 1469, 1961.
7. Kibble T. J. Math. Phys., **2**, 212, 1961.
8. Фролов Б. Н. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 6, 48, 1963.
9. Hehl F. Ahb. Braunschw. Wiss. Ges., **18**, 98, 1966.
10. Trautman A. Preprint IFT, (72) **13**, Warsawa.
11. Heht F. Phys. Lett., **A36**, 3, 225, 1971.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1967.
13. Пономарев В. Н. Bull. Acad. Pol. Science, **6**, 545, 1971.
14. Mc Vittie G. General Relativity and Cosmology, London, 1964.
15. Clemence G. Rev. Mod. Phys., **18**, 361, 1971.
16. Dicke R. Phys. Rev. Lett., **18**, 313, 1967.

Поступила в редакцию
16.11 1972 г.

Кафедра
теоретической физики