Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1974

УДК 538.3 : 530.145

А. А. СОКОЛОВ, В. Ч. ЖУКОВСКИЙ, Н. С. НИКИТИНА

КВАНТОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ ЭЛЕКТРОНОВ В СВЕРХСИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Получена вероятность испускания жесткого гамма-кванта при переходе релятивистского электрона на основной или близкий к нему уровень в магнитном поле $H \sim H_0 = \frac{m^2c^3}{e_0\hbar} \approx 4,41 \cdot 10^{13}$ *э*. Для обратных переходов с этих уровней вычислено сечение фотовозбуждения электронов и показано, что оно максимально при $H=2H_0$.

В последнее время появились экспериментальные возможности для изучения взаимодействия электронов высоких энергий с фотонами в интенсивных магнитных полях. Планируются эксперименты по проверке квантовоэлектродинамической теории синхротронного изучения электронов, ускоренных до энергии $E \sim 10 \div 100$ *Гэв* в импульсных магнитных полях $H \sim 10^7 \div 10^8$ *э* [1]. Имеются также указания [2] о существовании в астрофизических условиях и, в частности, вблизи нейтронных звезд сверхсильных магнитных полей $H \sim H_0 = \frac{m^2c^3}{e_0\hbar} = 4{,}41 \cdot 10^{13}$ *э*. Ввиду этого встает вопрос о распространении теории квантовых переходов электронов в магнитном поле на область полей сверхвысоких интенсивностей.

Собственные значения энергии электрона в однородном магнитном поле $H \| Oz$, соответствующие точным решениям уравнения Дирака, имеют вид [3]

$$E = c\hbar\mathscr{K} = c\hbar k_0 \sqrt{1 + 2n\frac{H}{H_0} + \frac{k_3^2}{k_0^2}}, \tag{1}$$

где $n=0, 1, 2, \ldots$ — главное квантовое число, $\hbar k_3$ — проекция импульса на ось $0z$, $k_0 \equiv mc/\hbar$.

Интенсивность излучения является релятивистским инвариантом и поэтому зависит лишь от двух инвариантных параметров:

$$\xi = \frac{3}{2}\frac{H}{H_0}\frac{k_\perp}{k_0}, \quad f = \frac{H}{H_0}\left(k_\perp \equiv \sqrt{\mathscr{K}^2 - k_3^2 - k_0^2}\right). \tag{2}$$

Рассмотрим интенсивность излучения при различных значениях этих параметров, причем для простоты положим начальное значение $k_3=0$.

1. Параметр $f=\frac{H}{H_0}\ll 1$, ξ — произвольно, однако $f\ll\xi$ (т. е. $k_\perp\gg k_0$). Это область квазиклассики, в которой основной вклад в интенсивность дают переходы между состояниями с большими квантовыми числами $n\gg 1$, $n'\gg 1$, причем $E\gg mc^2$ и $E'\gg mc^2$. Матричные элементы переходов $n\to n'$, сопровождающихся испусканием фотонов с энергией $c\hbar\varkappa$ под углом θ к магнитному полю, выражаются через функции Лагерра:

$$I_{nn'}(x)=\sqrt{\frac{n'!}{n!}}\,e^{-x/2}\,x^{\frac{n-n'}{2}}\,L_{n'}^{n-n'}(x), \tag{3}$$

где $L_{n'}^{n-n'}(x)$ — обобщенный полином Лагерра, а аргумент

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa}{k_0}\right)^2\frac{H_0}{H}\sin^2\theta. \tag{4}$$

В рассматриваемой области ($f\ll 1$, $f\ll\xi$, $n\gg 1$, $n'\gg 1$) функция Лагерра аппроксимируется функцией Макдональда $\mathcal{K}_{1/3}$:

$$I_{nn'}(x)=\frac{\sqrt{\varepsilon(1+\xi y)}}{\pi\sqrt{3}}\mathcal{K}_{1/3}(z),\quad z=\frac{1}{2}y\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{3/2}. \tag{5}$$

Здесь

$$\varepsilon=\varepsilon_0+\cos^2\theta,\quad \varepsilon_0=(k_0/\mathcal{K})^2, \tag{6}$$

$$y=\frac{1}{\xi}\frac{\varkappa}{\mathcal{K}-\varkappa},\quad \varepsilon\sim\varepsilon_0\sim\cos^2\theta.$$

Изменению конечной энергии электрона $\mathcal{K}'$ в пределах $k_0\leqslant\mathcal{K}'\leqslant\mathcal{K}$ соответствует интервал переменной y:

$$0\leqslant y\leqslant y_{\text{макс}}=\frac{2}{3}\frac{H_0}{H}\frac{\mathcal{K}-k_0}{\mathcal{K}}. \tag{7}$$

При малых полях $H\ll H_0$ верхний предел $y_{\text{макс}}$ может быть заменен бесконечностью. Заметим, что при $y\gg 1$ функция $\mathcal{K}_{1/3}(y)\sim\exp(-y)$, поэтому вероятность испускания фотона с максимальной энергией $\varkappa\sim\mathcal{K}-k_0$ при переходе электрона в основное или близкое к нему состояние $\mathcal{K}\sim k_0$ будет экспоненциально мала:

$$\left(\frac{dw}{dy}\right)_{y\to y_{\text{макс}}}\sim\exp(-y_{\text{макс}}). \tag{8}$$

2. Параметр $f=H/H_0\sim 1$, $\xi\gg 1$ (релятивистские электроны $E\gg mc^2$, $n\gg 1$). В этой области существенный вклад в вероятность дают переходы в состояния с малыми конечными квантовыми числами n' и энергией $\mathcal{K}'\sim k_0$ (энергия фотонов $\varkappa\sim\mathcal{K}\gg k_0$). Для функций Лагерра в этом случае справедлива аппроксимация функциями параболического цилиндра $D_{n'}$ (см. Приложение):

$$I_{nn'}(x)=\frac{D_{n'}(\eta)}{\sqrt{n'!\sqrt{2\pi n}}}, \tag{9}$$

где

$$n'\sim n\varepsilon_0=H_0/2H\sim 1,$$

$$D_{n'}(\eta) = 2^{-n'/2} e^{-\eta^2/4} H_{n'}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right), \tag{10}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{2H_0}{H}} \frac{\mathcal{K}'}{k_0} = 2\sqrt{n' + \frac{1}{2}\frac{H_0}{H}(1 + k_3'^2/k_0^2)}.$$

Принимая во внимание эту аппроксимацию, получим дифференциальную вероятность перехода электрона из состояния $n \gg 1$, $k_3 = 0$ в состояние n', k_3':

$$\frac{dw_{nn'}}{dk_3'} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e_0^2}{c\hbar} \frac{mc^3}{E} \sqrt{\frac{H}{H_0}} F_{n'\zeta'}\left(k_3', \frac{H}{H_0}\right), \tag{11}$$

где

$$F_{n'\zeta'}\left(k_3', \frac{H}{H_0}\right) = \frac{1}{4n'!}\left\{\left(1 + \zeta'\sqrt{\frac{H_0/2H}{n' + H_0/2H}}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left[n' D_{n'-1}^2(\eta) - D_{n'}^2(\eta)\right] - \frac{2}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta} D_{n'}^2(\eta)\right\}, \tag{12}$$

где $\zeta' = \pm 1$ — квантовое число, соответствующее конечной ориентации спина электрона вдоль ($\zeta' = 1$) или против ($\zeta' = -1$) направления магнитного поля.

Поскольку $\varkappa \sim \mathcal{K}$, а $k_3/\mathcal{K} \sim \sqrt{\varepsilon_0}$, то пределы изменения переменной k_3' можно считать бесконечными. В результате после интегрирования по k_3' находим

$$w_{nn'} = \frac{1}{2} \frac{e_0^2}{c\hbar} \frac{mc^2}{\hbar}\left(\frac{mc^2}{E}\frac{H}{H_0}\right)(-1)^n \left\{ e^{-\mu/2} L_{n'}(\mu) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\left(1 + \zeta'\sqrt{\frac{H_0/2H}{n' + H_0/2H}}\right)\int_{\mu}^{\infty} d\nu e^{-\nu/2}\left[L_{n'}(\nu) + n' L_{n'-1}(\nu)\right]\right\}, \tag{13}$$

где $L_{n'}(\mu)$ — полином Лагерра, $\mu = 4n' + 2\frac{H_0}{H}$.

В частности, переход на основной уровень ($n' = 0$, $\zeta' = -1$) происходит с вероятностью

$$w_{n0} = \frac{1}{2} \frac{e_0^2}{c\hbar} \frac{mc^2}{\hbar}\left(\frac{mc^2}{E}\frac{H}{H_0}\right) e^{-H_0/H}. \tag{14}$$

Как видно, при $H \sim H_0$ переход на основной (или близкий к нему) уровень в отличие от случая 1 перестает быть экспоненциально малым. Для переходов на более высокие уровни $n' \gg 1$ вероятность (13) убывает как $(1/n')^{2/3}$:

$$w_{nn'} = \frac{\Gamma(2/3)}{2^{1/3}\pi\sqrt{3}} \frac{e_0^2}{\hbar c} \frac{(mc^2)^2}{\hbar} \frac{H}{H_0}\left(\frac{3}{4n'}\right)^{2/3}. \tag{15}$$

Введем переменную

$$y = \frac{4}{3}\frac{(H_0/2H)^{3/2}}{\sqrt{n'}} = \frac{2}{3}\frac{H_0}{H}\frac{k_0}{\mathcal{K} - \varkappa},$$

(ср. с (6), где нужно положить $\varkappa \approx \mathcal{K}$), тогда для дифференциальной интенсивности излучения в области $y \ll 1$ ($n' \gg 1$) находим значение

$$\frac{dW}{dy} = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2^{1/3}\pi\sqrt{3}} \frac{e_0^2}{\hbar c} \frac{(mc^2)^2}{\hbar} \frac{dy}{y^{5/3}}, \tag{16}$$

совпадающее с выражением dW/dy, полученным на основе асимптотики (5) при $\xi \gg 1$ и $\xi y \gg 1$.

Рассмотрим обратный переход $n'=0, 1, 2, \ldots \to n \gg 1$ с основного (или близкого к нему) уровня на высокий уровень, соответствующий $E \gg mc^2$. Этот переход происходит с поглощением жесткого γ-кванта с энергией $\varkappa \sim \mathcal{K} \gg k_0$ в первом порядке теории возмущений (фотовозбуждение электрона в магнитном поле).

Предположим, что пучок неполяризованных фотонов летит перпендикулярно к магнитному полю $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$, тогда для сечения фотовозбуждения электрона, находящегося на уровне n', $k_3' = 0$ с проекцией спина ζ', получим

$$\sigma_{n'\zeta'} = 4\pi^{3/2} \frac{e_0^2}{\hbar c} \frac{(H_0/H)^{1/2}}{\varkappa k_0} F_{n'\zeta'}(0, H/H_0), \tag{17}$$

где $F_{n'\zeta'}(0, H/H_0)$ определяется формулой (12) при $k_3' = 0$. Отсюда следует, что сечение возбуждения электронов с основного уровня $n'=0$, $\zeta'=-1$ равно

$$\sigma_0 = 2\pi^{3/2} \frac{e_0^2}{\hbar c} \left(\frac{H_0}{H}\right)^{1/2} \frac{e^{-H_0/H}}{\varkappa k_0}. \tag{18}$$

Сечение σ_0 максимально при значении напряженности поля $H=2H_0$; если при этом энергия фотона $c\hbar\varkappa \sim 0{,}5$ *Гэв*, то $\sigma_0 \approx$ $\approx 2{,}6 \cdot 10^{-26}$ *см*^{2}, что на два порядка превышает сечение обычного комптоновского рассеяния в отсутствие внешнего поля.

Приложение

Функция $y = \sqrt{x}\, I_{nn'}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$y'' - f(x)\, y = 0, \tag{19}$$

где

$$f(x) = \frac{(n-n')^2 - 1}{4x^2} - \frac{n+n'+1}{2x} + \frac{1}{4}.$$

Введем преобразование:

$$y = \frac{\eta(\xi)}{\sqrt{-\xi'}}, \quad \xi = \xi(x).$$

Тогда для $\eta(\xi)$ получим уравнение

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \frac{f(x)}{\xi'^2}\eta = \rho(\xi)\,\eta, \tag{20}$$

где

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2}\frac{\xi'''}{\xi'^3} - \frac{3}{4}\frac{\xi''^2}{\xi'^4}.$$

Потребуем, чтобы $\xi(x)$ удовлетворяла уравнению

$$-\frac{f(x)}{\xi'^2}=n'+\frac{1}{2}-\frac{\xi^2}{4}.$$

Отсюда находим

$$\int\limits_x^{x_0}\sqrt{f(x)}\,dx=\frac{1}{4}\,\xi\sqrt{\xi^2-4\left(n'+\frac{1}{2}\right)}-$$

$$-\left(n'+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\xi+\sqrt{\xi^2-4\left(n'+\frac{1}{2}\right)}\right)+\left(n'+\frac{1}{2}\right)\ln\left(2\sqrt{n'+\frac{1}{2}}\right). \quad (21)$$

Здесь x_0 — один из корней уравнения $f(x)=0$, т. е. точка перехода для (19):

$$x_{1,2}=n+n'+1\mp\sqrt{2(n+n'+1+2nn')}.$$

Нас интересует решение уравнения (19) в области $0<x<x_1$ при $n\gg 1$, $n'\ll n$. Для значений ξ, удовлетворяющих (21), величина $\rho(\xi)$ будет всюду мала при $0<x<x_1$. Таким образом, решение уравнения

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\left(n'+\frac{1}{2}-\frac{\xi^2}{4}\right)\eta=0$$

дает равномерное асимптотическое представление решения уравнения (20):

$$\eta=AD_{n'}(\xi),$$

где A — константа, $D_{n'}$ — функция параболического цилиндра. Аргумент функции $I_{nn'}(x)$ может быть представлен в виде

$$x=n\frac{\left(1-\sqrt{\varepsilon+\frac{n'}{n}(1-\varepsilon)}\right)^2}{1-\varepsilon}\approx n-2\sqrt{n(n'+n\varepsilon)}.$$

Аргумент ξ при $x\to x_1-0$ находим из (21), переходя к пределу $x\to x_1-0$:

$$\xi=2\sqrt{n\varepsilon+n'}.$$

Константа A может быть найдена также из (21) в другой предельной точке $x\to 0$. При этом используем асимптотики:

$$I_{nn'}(x)\simeq\frac{x^{\frac{n-n'}{2}}}{\left(\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}\right)^{1/2}n^{-n'}\sqrt{n'!}}\quad \text{при } n\gg n',\ x\to 0;$$

$$\frac{D_{n'}(\xi)}{\sqrt{-x\xi'}}\approx n^{-1/2}e^{-\frac{\xi^2}{4}+\left(n'+\frac{1}{2}\right)\ln\xi}\quad \text{при } \xi\to+\infty.$$

В результате находим:

$$A=(2\pi n'!)^{-1/2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Erber T. Acta Phys. Austriaca, Suppl, n 8, 1971.
2. Sokolov A. A., Zhukovskii V. Ch., Nikitina N. S. Phys. Lett., 43A, 85, 1973.
3. Синхротронное излучение, сб. статей под редакцией А. А. Соколова и И. М. Тернова. М., 1966.

Поступила в редакцию
1.9 1972 г.

Кафедра
теоретической физики