Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1974

А. П. САМОХИН, Д. А. СЛАВНОВ

КВАНТОВАНИЕ СВОБОДНОГО БОЗОННОГО ПОЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО СПИНА (СЛУЧАЙ $m \neq 0$)

Проведено каноническое квантование поля с $m \neq 0$ с произвольным целым спином. Получены формулы для перестановочных соотношений полей с любым целым спином, исправляющие соответствующие формулы Фирца.

В данной работе проводится квантование поля с произвольным целым спином.

Бозонное поле спина S можно описывать с помощью тензоров ранга S. Именно поле $A_{\alpha_1 \dots \alpha_S}(x)$, удовлетворяющее дополнительным условиям

$$A_{\alpha_1 \dots \alpha_S}(x) \text{ (симметричен по всем индексам)},$$

$$A^{\alpha}_{\cdot \alpha \alpha_3 \dots \alpha_S}(x) = 0, \tag{1}$$

$$\partial^{\alpha} A_{\alpha \alpha_2 \dots \alpha_S}(x) = 0, \tag{2}$$

обладает ровно $(2S+1)$ линейно-независимыми компонентами и описывает частицы спина S [1].

Данная проблема не является новой в квантовой теории поля. Еще в сороковых годах Фирц [1], Дирак [2], Паули [3] провели квантование таких систем. Используемые в дальнейших работах [4, 5, 6] способы квантования весьма далеки от канонического. Для всех перечисленных работ характерно желание учесть дополнительные условия непосредственно в лагранжиане. В результате лагранжиан получается очень громоздким и каноническое квантование оказывалось невозможным.

В настоящей статье, исходя из очень простого лагранжиана, являющегося непосредственным обобщением лангранжиана скалярного поля, проведено квантование полей с высшими спинами способом, максимально приближенным к каноническому.

§ 1. Классическая теория

При описании свободного бозонного поля, соответствующего частицам с целым спином S, мы будем исходить из лангранжиана

$$L(x) = (-1)^S \{\partial_{\beta} \overset{*}{A}_{\alpha_1 \dots \alpha_S}(x)\, \partial^{\beta} A^{\alpha_1 \dots \alpha_S}(x) -$$

$$- m^2 \overset{*}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_S}(x) A^{\alpha_1 \ldots \alpha_S}(x)\}. \tag{3}$$

Дополнительные условия на поле $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_S}(x)$ будем накладывать независимо от L. Уравнение Лагранжа — Эйлера дает обычные уравнения поля, т. е. уравнения Клейна — Гордона:

$$(\partial_\beta \partial^\beta - m^2) A_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(x) = 0, \quad (\partial_\beta \partial^\beta - m^2) \overset{*}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(x) = 0. \tag{4}$$

Вычисление тензора энергии-импульса по известным общим формулам (см., например, [7]) дает

$$T^{\alpha\beta}(x) = (-1)^s \{\partial^\alpha \overset{*}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(x) \partial^\beta A^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(x) +$$

$$+ \partial^\alpha A^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(x) \partial^\beta \overset{*}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(x)\} - g^{\alpha\beta} L(x).$$

Переходя к импульсному представлению, получим следующее выражение для вектора энергии-импульса:

$$P^\alpha = (-1)^s \int d\mathbf{k}\, k^\alpha \{A^{*(-)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(\mathbf{k}) A^{(+)\alpha_1 \ldots \alpha_s}(\mathbf{k}) +$$

$$+ A^{*(+)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(\mathbf{k}) A^{(-)\alpha_1 \ldots \alpha_s}(\mathbf{k})\}, \tag{5}$$

где $A^{(\pm)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(\mathbf{k})$ и $A^{*(\pm)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(\mathbf{k})$ — положительно- и отрицательно-частотные части $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(\mathbf{k})$ и $\overset{*}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(\mathbf{k})$. Перепишем выражение энергии в такой форме:

$$P^0 = (-1)^s g^{\alpha_1\alpha_1} g^{\alpha_2\alpha_2} \ldots g^{\alpha_s\alpha_s} \int d\mathbf{k} k^0 \{ | A^{(+)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(\mathbf{k}) |^2 + | A^{(-)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(\mathbf{k}) |^2 \}.$$

Здесь стоит сумма по всем $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$. Из этого выражения видно, что энергия не является положительно определенной. Чтобы добиться положительной определенности энергии, наложим на поля $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(x)$, $\overset{*}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(x)$ дополнительные условия, о которых говорилось выше, т. е. будем считать тензорное поле $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(x)$ (так же, как и $\overset{*}{A}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(x)$) симметричным по всем индексам и удовлетворяющим условиям (1) и (2). В импульсном представлении эти дополнительные условия выглядят так.

Тензоры $A^{(\pm)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(\mathbf{k})$ (симметричны по всем индексам),

$$A^{(\pm)\alpha}_{.\alpha\alpha_3 \ldots \alpha_s}(\mathbf{k}) = 0,$$

$$k^\alpha A^{(\pm)}_{\alpha\alpha_2 \ldots \alpha_s}(\mathbf{k}) = 0. \tag{6}$$

Чтобы добиться положительной определенности энергии, введем вектора поляризации $\mathbf{e}(\lambda, \mathbf{k})$. Так как мы рассматриваем случай $m \neq 0$, то всегда существует система покоя, т. е. система, где $\mathbf{k} = 0$. Выберем в ней вектора поляризации таким образом:

$$\mathbf{e}(\lambda, 0) = \{\delta_{\lambda 0}, \delta_{\lambda 1}, \delta_{\lambda 2}, \delta_{\lambda 3}\},$$

где $\delta_{\lambda\mu}$ — символ Кронекера. Введем чистое преобразование Лоренца, переводящее покоящуюся частицу массы m в частицу, движущуюся с импульсом $\mathbf{k}$:

$$M(\mathbf{k})=\begin{bmatrix} \frac{K^0}{m} & \frac{K^1}{m} & \frac{K^2}{m} & \frac{K^3}{m} \\ \frac{K^1}{m} & 1+\frac{K^1K^1}{m(m+K^0)} & \frac{K^1K^2}{m(m+K^0)} & \frac{K^1K^3}{m(m+K^0)} \\ \frac{K^2}{m} & \frac{K^2K^1}{m(m+K^0)} & 1+\frac{K^2K^2}{m(m+K^0)} & \frac{K^2K^3}{m(m+K^0)} \\ \frac{K^3}{m} & \frac{K^3K^1}{m(m+K^0)} & \frac{K^3K^2}{m(m+K^0)} & 1+\frac{K^3K^3}{m(m+K^0)} \end{bmatrix}.$$

Тогда по определению

$$e^{\alpha}(\lambda,\ \mathbf{k})\equiv M^{\alpha}_{\cdot\beta}(\mathbf{k})\,e^{\beta}(\lambda,\ 0)=M^{\alpha}_{\cdot\beta}(\mathbf{k})\,\delta_{\beta\lambda}=M^{\alpha}_{\cdot\lambda}(\mathbf{k}).$$

Легко проверить, что вектора поляризации обладают такими свойствами:

$$e^{\alpha}(\lambda,\ \mathbf{k})\,e_{\alpha}(\mu,\ \mathbf{k})=g^{\lambda\mu},$$

$$k^{\alpha}e_{\alpha}(\lambda,\ \mathbf{k})=m\delta_{\lambda 0}. \tag{7}$$

Теперь разложим $A^{(\pm)}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\mathbf{k})$, $A^{*(\pm)}_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\mathbf{k})$ по произведению векторов поляризации

$$A^{(\pm)}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(\mathbf{k})=e_{\alpha_1}(\lambda_1,\ \mathbf{k})\ldots e_{\alpha_S}(\lambda_S,\ \mathbf{k})\,a^{(\pm)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{k}),$$

$$A^{*(\pm)}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(\mathbf{k})=e_{\alpha_1}(\lambda_1,\ \mathbf{k})\ldots e_{\alpha_S}(\lambda_S,\ \mathbf{k})\,a^{*(\pm)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{k}) \tag{8}$$

и перепишем дополнительные условия на A в терминах амплитуд a.

Несложные выкладки приводят к таким условиям:

а) $a^{(\pm)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{k})$ — симметричны по всем индексам,

б) $a^{(\pm)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{k})=0$, если хотя бы один из индексов λ равен нулю (т. е. отличны от нуля только амплитуды с пространственными индексами $a^{(\pm)}_{i_1\ldots i_S}(\mathbf{k})$),

в) $a^{(\pm)}_{jj\lambda_3\ldots\lambda_S}(\mathbf{k})=0$ (берется сумма по j). (Греческие индексы пробегают 0, 1, 2, 3, латинские — 1, 2, 3).

Подсчет числа независимых амплитуд $a^{(\pm)}_{i_1\ldots i_S}(\mathbf{k})$ дает $(2S+1)$. Аналогичное происходит и с сопряженными амплитудами $a^{*(\pm)}_{i_1\ldots i_S}(\mathbf{k})$. Учитывая (7), (8), дополнительные условия на амплитуды a и их свойство:

$$(a^{(+)})^{*}=a^{*(-)},\quad (a^{(-)})^{*}=a^{*(+)}.$$

мы можем вектор энергии-импульса (5) записать через амплитуды a таким образом:

$$P^{\alpha}=\sum_{\{i\}}\int d\mathbf{k}k^{\alpha}\,\{|\,a^{(+)}_{i_1\ldots i_S}(\mathbf{k})\,|^2+|\,a^{(-)}_{i_1\ldots i_S}(\mathbf{k})\,|^2\}. \tag{9}$$

В этой формуле стоят суммы по всем индексам i. Из формулы (9) видно, что энергия положительно определена. Разумеется, не все амплитуды в окончательном выражении для P^{α} независимы. Ведь в них не учтены симметрия амплитуд по индексам и условие (в).

Но важна достигнутая положительная определенность энергии, которая не изменится при введении в окончательный результат этих условий.

§ 2. Квантование поля

Основные трудности при квантовании рассматриваемых полей проистекают из-за необходимости учитывать дополнительные условия. Чтобы избежать этих трудностей, будем сначала считать, что все компоненты независимы; тогда квантование возможно стандартным каноническим способом.

Обобщенные импульсы для лагранжиана (3) таковы:

$$\pi_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(x) = \frac{\partial L}{\partial(\partial^0\widetilde{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(x))} =$$

$$= (-1)^S g^{\alpha_1\alpha_1}\ldots g^{\alpha_S\alpha_S}\partial_0\widetilde{A}^*_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(x),$$

$$\pi^*_{\alpha_1\ldots\alpha_S} = \frac{\partial L}{\partial(\partial^0\widetilde{A}^*_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(x))} =$$

$$= (-1)^S g^{\alpha_1\alpha_1}\ldots g^{\alpha_S\alpha_S}\partial_0\widetilde{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(x).$$

Канонические перестановочные соотношения выглядят так:

$$[\widetilde{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(x),\quad \partial^0\widetilde{A}^*_{\beta_1\ldots\beta_S}(y)]_{x^0=y^0} = [\widetilde{A}^*_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(x),\quad \partial^0\widetilde{A}_{\beta_1\ldots\beta_S}(y)]_{x^0=y^0} =$$

$$= (-1)^S g^{\alpha_1\beta_1}\ldots g^{\alpha_S\beta_S}\cdot i\cdot\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{10}$$

остальные коммутаторы равны нулю.

Переходим в (10) к импульсному представлению и точно так же, как для скалярного поля, получим

$$[\widetilde{A}^{(-)}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(\mathbf{k}), \widetilde{A}^{*(+)}_{\beta_1\ldots\beta_S}(\mathbf{q})]_- = [\widetilde{A}^{*(-)}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(\mathbf{k}),\quad \widetilde{A}^{(+)}_{\beta_1\ldots\beta_S}(\mathbf{q})]_- =$$

$$= (-1)^S g^{\alpha_1\beta_1}\ldots g^{\alpha_S\beta_S}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}),$$

остальные коммутаторы равны нулю.

Найдем перестановочные соотношения для поляризационных амплитуд. Для этого выразим a через $\widetilde{A}$, используя (7) и (8):

$$a^{(\pm)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{k}) = g^{\lambda_1\lambda_1}\ldots g^{\lambda_S\lambda_S}e^{\alpha_1}(\lambda_1,\ \mathbf{k})\ldots e^{\alpha_S}(\lambda_S,\ \mathbf{k})\,\widetilde{A}^{(\pm)}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(\mathbf{k}),$$

$$a^{*(\pm)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{k}) = g^{\lambda_1\lambda_1}\ldots g^{\lambda_S\lambda_S}e^{\alpha_1}(\lambda_1,\ \mathbf{k})\ldots e^{\alpha_S}(\lambda_S,\ \mathbf{k})\,\widetilde{A}^{*(\pm)}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(\mathbf{k}). \tag{11}$$

Отсюда получаем

$$[a^{(-)}_{\mu_1\ldots\mu_S}(\mathbf{k}),\quad a^{*(+)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{q})]_- = [a^{*(-)}_{\mu_1\ldots\mu_S}(\mathbf{k}),\ a^{(+)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{q})]_- =$$

$$= (-1)^S g^{\mu_1\lambda_1}\ldots g^{\mu_S\lambda_S}\cdot\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}),$$

остальные коммутаторы равны нулю.

Попытаемся учесть дополнительные условия (а, б, в). Учет условий (а, в) трудности не представляет. Фактически эти условия означают, что нас интересуют не все компоненты $a_{\lambda_1}...\lambda_S(\mathbf{k})$, а только их линейные комбинации, удовлетворяющие (а, в).

Сначала учтем условие (а), симметризовав $a_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{k})$:

$$b_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{S!}\sum P(\lambda)\, a_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{k}).$$

Здесь $\Sigma P(\lambda)$ — сумма по всем перестановкам индексов λ. Перестановочные соотношения для симметричных по всем индексам тензоров $b_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{k})$ имеют вид

$$[b^{(-)}_{\mu_1\ldots\mu_S}(\mathbf{k}),\quad b^{*(+)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{q})]_- = [b^{*(-)}_{\mu_1\ldots\mu_S}(\mathbf{k}),\quad b^{(+)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{q})]_- =$$

$$= \frac{(-1)^S}{S!}\,\Sigma\, P(\lambda)\, g^{\mu_1\lambda_1}\ldots g^{\mu_S\lambda_S}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}),$$

остальные коммутаторы равны нулю.

Наложим на тензоры $b_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{k})$ и $b^*_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{k})$ условие (в).

Для этого воспользуемся тождеством

$$b_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{k}) \equiv -\frac{1}{S!}\sum_{m=1}^{\frac{S}{2},\ \frac{S-1}{2}} B^{S-r}_m\,\Sigma\, P(\lambda)\, g^{\lambda_1\lambda_2}\ldots g^{\lambda_{2m-1}\lambda_{2m}}\, b^{i\cdot j\ldots k}_{\cdot i\cdot j\ldots k\lambda_{2m+1}\ldots\lambda_S} +$$

$$+\Big\{b_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{k}) + \frac{1}{S!}\sum_{m=1}^{\frac{S}{2},\ \frac{S-1}{2}} B^{S-r}_m\,\Sigma P(\lambda)\, g^{\lambda_1\lambda_2}\ldots g^{\lambda_{2m-1}\lambda_{2m}},$$

$$b^{i\cdot j\ldots k}_{\cdot i\cdot j\ldots k\lambda_{2m+1}\ldots\lambda_S}(\mathbf{k})\Big\}. \qquad (12)$$

Четному спину соответствует верхний предел суммы $\frac{S}{2}$, а нечетнему — $\frac{S-1}{2}$. Коэффициенты B^{S-r}_m выглядят так:

$$B^{S-r}_m = \frac{(-1)^m}{2^m}\,C^m_{S-r-m}\cdot\frac{(S-r)(S-r-1)\ldots(S-r-m+1)}{(2(S-r)-1)(2(S-r)-3)\ldots(2(S-r)-2m+1)},$$

где r — число нулей среди индексов $\lambda_1, ..., \lambda_S$, а C^m_{S-r-m} — биноминальный коэффициент. Выражение в фигурных скобках (12) симметрично по всем индексам λ, и сумма по любой паре индексов, пробегающих значения 1, 2, 3, равна нулю.

Обозначим это выражение $a_{\lambda_1\ldots\lambda_S}$ и введем обозначение:

$$\frac{1}{S!}\sum_{m=1}^{\frac{S}{2},\ \frac{S-1}{2}} B^{S-r}_m\,\Sigma P(\lambda)\, g^{\lambda_1\lambda_2}\ldots g^{\lambda_{2m-1}\lambda_{2m}},$$

$$b^{i\cdot j\ldots k\cdot}_{\cdot i\cdot j\ldots k\lambda_{2m+1}\ldots\lambda_S}(\mathbf{k}) \equiv K_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{k}).$$

Тогда интересующий нас коммутатор будет равен

$$[a^{(-)}_{\mu_1\ldots\mu_S}(\mathbf{k}),\quad a^{*(+)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{q})]_- = [b^{(-)}_{\mu_1\ldots\mu_S}(\mathbf{k}),\quad b^{*(+)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{q})]_- +$$

$$+[b^{(-)}_{\mu_1\ldots\mu_S}(\mathbf{k}),\quad K^{*(+)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{q})]_- +$$

$$+[K^{(-)}_{\mu_1\ldots\mu_S}(\mathbf{k}),\quad b^{*(+)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{q})]_- + [K^{(-)}_{\mu_1\ldots\mu_S}(\mathbf{k}),\quad K^{*(+)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{q})]_-. \qquad (13)$$

Вычисляя три коммутатора, стоящие справа в (13), получим канонические перестановочные соотношения для тензоров $a^{(\pm)}_{\mu_1\ldots\mu_S}(\mathbf{k})$, $a^{*(\pm)}_{\mu_1\ldots\mu_S}(\mathbf{k})$, обладающих свойствами (а, в):

$$[a^{(-)}_{\mu_1\ldots\mu_S}(\mathbf{k}),\quad a^{*(+)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{q})]_- = [a^{*(-)}_{\mu_1\ldots\mu_S}(\mathbf{k}),\quad a^{(+)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{q})]_- =$$

$$= \frac{(-1)^S}{S!}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q})\left\{\Sigma P(\lambda)\, g^{\mu_1\lambda_1}\ldots g^{\mu_S\lambda_S} + \right.$$

$$+\frac{1}{S!}\sum_{m=1}^{\frac{S}{2},\ \frac{S-1}{2}} B^{S-r}_m\, \Sigma P(\mu)\, \Sigma P(\lambda)\, g^{\mu_1\mu_2}\ldots$$

$$\left.\ldots g^{\mu_{2m-1}\mu_{2m}}\, g^{\lambda_1\lambda_2}\ldots g^{\lambda_{2m-1}\lambda_{2m}}\, g^{\mu_{2m+1}\lambda_{2m+1}}\ldots g^{\mu_S\lambda_S}\right\}, \qquad (14)$$

остальные коммутаторы равны нулю.

Проквантованное поле следует рассматривать как вспомогательное нефизическое поле, так как, с одной стороны, в нем не учтены дополнительные условия (2), т. е. оно обладает лишними компонентами, а с другой, коммутаторы для амплитуд, имеющих хотя бы один нулевой индекс, имеют неправильный знак.

Последнее приводит к тому, что пространство H, в котором осуществляется циклическое представление операторов a, a^*, будет обладать индефинитной метрикой.

Ситуация здесь вполне аналогична положению, имеющему место при квантовании электромагнитного поля по Гупта—Блейлеру [8, 9].

Попытаемся учесть дополнительные условия (2). Так же, как в методе Гупта—Блейлера, будем рассматривать (2), как условие на физически реализуемые векторы состояния.

В качестве физического пространства H_S возьмем пространство, являющееся линейной оболочкой векторов вида:

$$\frac{1}{\sqrt{n!}}\cdot\frac{1}{\sqrt{m!}}\, a^{*(+)}_{\{i\}_n}(\mathbf{k}_n)\ldots a^{*(+)}_{\{i\}_1}(\mathbf{k}_1),$$

$$a^{(+)}_{\{j\}_m}(\mathbf{q}_m)\ldots a^{(+)}_{\{j\}_1}(\mathbf{q}_1)\,|\,0>.$$

Здесь индексы в наборах $\{i\}$, $\{j\}$ пробегают значения 1, 2, 3. Очевидно, что векторы Φ из этого пространства удовлетворяют условию

$$a^{(-)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}\,|\,\Phi> = a^{*(-)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}\,|\,\Phi> = 0, \qquad (15)$$

если хотя бы один индекс равен нулю, (15) является аналогом дополнительного условия (б). Метрика в пространстве H_S, очевидно, будет положительно определенной.

В этом пространстве введем операторы физического поля следующим образом:

$$A^{(\pm)}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(\mathbf{k}) = e_{\alpha_1}(j_1,\ \mathbf{k})\ldots e_{\alpha_S}(j_S,\ \mathbf{k})\, a^{(\pm)}_{j_1\ldots j_S}(\mathbf{k}), \qquad (16)$$

$$A^{*(\pm)}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(\mathbf{k}) = e_{\alpha_1}(j_1,\ \mathbf{k})\ldots e_{\alpha_S}(j_S,\ \mathbf{k})\, a^{*(\pm)}_{j_1\ldots j_S}(\mathbf{k}).$$

Дополнительное условие (2) в импульсном пространстве (формула (6)) выполняется для физического поля автоматически, что следует из ортогональности $e_\alpha(j,\mathbf{k})$ к вектору $\mathbf{k}$ (7).

Итак, поле

$$A^{(\pm)}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}}\, e^{\pm ikx} \cdot e_{\alpha_1}(j_1,\ \mathbf{k})\ldots,$$

$$e_{\alpha_S}(j_S,\ \mathbf{k})\, a^{(\pm)}_{j_1\ldots j_S}(\mathbf{k})$$

удовлетворяет правильному уравнению поля (4), симметрии по всем индексам и условиям (1 и 2).

Таким образом физическое поле является сужением на физическое пространство операторов канонически проквантованного вспомогательного поля, причем учет дополнительных условий свелся к отбрасыванию нефизических компонентов. Необходимо еще убедиться, что введенное физическое поле обладает правильными трансформационными свойствами. Поле $\widetilde{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(\mathbf{k})$ по построению обладало правильными трансформационными свойствами, а поле $A_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(\mathbf{k})$ мы получим, выбросив амплитуды $a_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{k})$ с нулевыми индексами.

Посмотрим, как при преобразованиях Лоренца преобразуются компоненты $a^{(\pm)}_{\lambda_1\ldots\lambda_S}(\mathbf{k})$ с нулевыми индексами и компоненты с чисто пространственными индексами $a^{(\pm)}_{j_1\ldots j_S}(\mathbf{k})$. Разберем сначала частный случай $S=1$. При преобразовании Лоренца:

$$k'^\alpha = \Lambda^{\alpha}_{\cdot\beta}\, k^\beta \tag{17}$$

на основании (11) имеем:

$$a^{(\pm)}_\mu(\mathbf{k}) \to a'^{(\pm)}_\mu(\mathbf{k}') = g^{\mu\mu}\, e^\alpha(\mu,\ \mathbf{k}')\, \widetilde{A}'^{(\pm)}_\alpha(\mathbf{k}'), \tag{18}$$

где

$$\widetilde{A}'^{(\pm)}_\alpha(\mathbf{k}') = \Lambda_\alpha^{\cdot\beta} \widetilde{A}^{(\pm)}_\beta(\mathbf{k}) = \Lambda_\alpha^{\cdot\beta}\, e_\beta(\lambda,\ \mathbf{k})\, a^{(\pm)}_\lambda(\mathbf{k}). \tag{19}$$

Вспоминая определение $e^\alpha(\mu,\ \mathbf{k})$ и обозначая

$$M_\alpha^{\cdot\mu}(\mathbf{k}')\, \Lambda^{\alpha}_{\cdot\beta}\, M^{\beta}_{\cdot\lambda}(\mathbf{k}) \equiv R^{\mu}_{\cdot\lambda},$$

имеем после подстановки (19) в (18):

$$a'^{(\pm)}_\mu(\mathbf{k}') = R^{\mu}_{\cdot\lambda}\, a^{(\pm)}_\lambda(\mathbf{k}). \tag{20}$$

Легко проверить, что

$$R^T = R^{-1}, \quad R^{0}_{\cdot 0} = 1,$$

$$R^{0}_{\cdot j} = R^{j}_{\cdot 0} = 0, \tag{21}$$

т. е. $R^{\mu}_{\cdot\lambda}$ описывает чисто пространственное вращение. Исходя из (21) и (22), получим

$$a'^{(\pm)}_0(\mathbf{k}') = a^{(\pm)}_0(\mathbf{k}),$$

$$a'^{(\pm)}_j(\mathbf{k}') = R_j^{\cdot i}\, a^{(\pm)}_i(\mathbf{k}). \tag{22}$$

Иными словами, при преобразовании Лоренца компонент $a_0^{(\pm)}(\mathbf{k})$ ведет себя как скаляр, компоненты $a_j^{(\pm)}(\mathbf{k})$ преобразуются по представлению группы вращения как трехмерный вектор. Существенно, что a_0 и a_j при преобразованиях Лоренца преобразуются *независимо*.

Посмотрим, как преобразуются компоненты $a_{\lambda_1\ldots\lambda_S}^{(\pm)}(\mathbf{k})$ при преобразованиях Лоренца (17). На основании (11) имеем

$$a_{\mu_1\ldots\mu_S}^{(\pm)}(\mathbf{k}) \to a_{\mu_1\ldots\mu_S}^{\prime(\pm)}(\mathbf{k}') =$$

$$= g^{\mu_1\mu_1}\ldots g^{\mu_S\mu_S} e^{\alpha_1}(\mu_1,\ \mathbf{k}')\ldots e^{\alpha_S}(\mu_S,\ \mathbf{k}')\,\widetilde{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}^{\prime(\pm)}(\mathbf{k}'),$$

но

$$\widetilde{A}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}^{\prime(\pm)}(\mathbf{k}') = \Lambda_{\alpha_1\ldots}^{\cdot\beta_1}\ \Lambda_{\alpha_S}^{\cdot\beta_S}\,\widetilde{A}_{\beta_1\ldots\beta_S}^{(\pm)}(\mathbf{k}). \tag{24}$$

Подставляя в (24) разложение $\widetilde{A}_{\beta_1\ldots\beta S}^{(\pm)}(\mathbf{k})$ по $e_\beta(\lambda,\ \mathbf{k})$ (8) и подставляя (24) в (23), получим

$$a_{\mu_1\ldots\mu_S}^{\prime(\pm)}(\mathbf{k}') = R_{\cdot\lambda_1\ldots}^{\mu_1}\ R_{\cdot\lambda_S}^{\mu_S}\,a_{\lambda_1\ldots\lambda_S}^{(\pm)}(\mathbf{k}). \tag{25}$$

Отсюда ясно, что $a_{j_1\ldots j_S}^{(\pm)}(\mathbf{k})$, $a_{0j_2\ldots j_S}^{(\pm)}(\mathbf{k})$,

$$a_{00j_3\ldots j_S}^{(\pm)}(\mathbf{k}),\ \ldots,\quad a_{00\ldots0j_S}^{(\pm)}(\mathbf{k}),$$

$a_{0\ldots0}^{(\pm)}(\mathbf{k})$ преобразуются как трехмерные тензоры соответствующего ранга, т. е.

$a_{j_1\ldots j_S}^{\prime(\pm)}(\mathbf{k}') = R_{j_1\ldots}^{\cdot i_1}\ R_{j_S}^{\cdot i_S}\,a_{i_1\ldots i_S}^{(\pm)}(\mathbf{k})$ — как 3-мерный тензор ранга S

$a_{0j_2\ldots j_S}^{\prime(\pm)}(\mathbf{k}') = R_{j_2\ldots}^{\cdot i_2}\ R_{j_S}^{\cdot i_S}\,a_{0i_2\ldots i_S}^{(\pm)}(\mathbf{k})$ — как 3-мерный тензор ранга $(S-1)$

. . . .

$a_{00\ldots0j_S}^{\prime(\pm)}(\mathbf{k}') = R_{j_S}^{\cdot i_S}\,a_{00\ldots0i_S}^{(\pm)}(\mathbf{k})$ — как 3-мерный тензор ранга 1 (вектор):

$a_{0\ldots0}^{\prime(\pm)}(\mathbf{k}') = a_{0\ldots0}^{(\pm)}(\mathbf{k})$ — как тензор ранга 0 (скаляр).

Видно, что выписанные амплитуды при преобразованиях Лоренца преобразуются *независимо*. Следовательно, каждая из этих совокупностей, действуя на $|0\rangle$, образует релятивистски инвариантное подпространство $\widetilde{H}$, т. е. пространство $\widetilde{H}$ распадается на ряд релятивистски инвариантных подпространств. В сущности мы приводимое представление группы Лоренца разбили на неприводимые представления. Релятивистски инвариантное подпространство, образованное $a_{i_1\ldots i_S}^{(\pm)}(\mathbf{k})$, имеет размерность $(2S+1)$ и совпадает с нашим H_S, в котором введены операторы физического поля.

Используя (20) и такую очевидную формулу

$$M_{\alpha0}(\mathbf{k}') = \Lambda_\alpha^{\cdot\mu} M_{\mu0}(\mathbf{k}),$$

можно легко убедиться в справедливости следующего соотношения:

$$M_{\alpha j}(\mathbf{k}')\,R_{\cdot i}^{j} = \Lambda_\alpha^{\cdot\beta} M_{\beta i}(\mathbf{k}).$$

Посмотрим, как преобразуется физическое поле $A_{\alpha_1\ldots\alpha_2}(\mathbf{k})$ при преобразованиях Лоренца. На основании определения физического поля (16):

$$A^{(\pm)}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(\mathbf{k}) \rightarrow A'^{(\pm)}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(\mathbf{k}') =$$

$$= e_{\alpha_1}(j_1,\ \mathbf{k}') \ldots e_{\alpha_S}(j_S,\ \mathbf{k}')\, a'^{(\pm)}_{j_1\ldots j_S}(\mathbf{k}'). \qquad (26)$$

Используя (25), (26) и (16), получим

$$A^{(\pm)}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(\mathbf{k}) - A'^{(\pm)}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(\mathbf{k}') =$$

$$= \Lambda^{\cdot\beta_1}_{\alpha_1}\ldots \Lambda^{\cdot\beta_S}_{\alpha_S} A^{(\pm)}_{\beta_1\ldots\beta_S}(\mathbf{k}).$$

Таким образом, мы видим, что физическое поле обладает правильными трансформационными свойствами.

Используя (16), (14) и обозначение

$$\overline{N}_{\alpha\beta} \equiv M_{\alpha j}(\mathbf{k})\, M^{\cdot j}_{\beta}(\mathbf{k}) = g^{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{m^2},$$

получим перестановочные соотношения для операторов физического поля:

$$[A^{(-)}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(\mathbf{k}),\quad A^{*(+)}_{\beta_1\ldots\beta_S}(\mathbf{q})]_- =$$

$$= [A^{*(-)}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(\mathbf{k}),\quad A^{(+)}_{\beta_1\ldots\beta_S}(\mathbf{q})]_- =$$

$$= \frac{(-1)^S}{S!}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q})\Big\{\Sigma P(\beta)\,\overline{N}_{\alpha_1\beta_1}\ldots \overline{N}_{\alpha_S\beta_S} +$$

$$+ \frac{1}{S!}\sum_{m=1}^{\frac{S}{2},\ \frac{S-1}{2}} B^S_m\, \Sigma P(\alpha)\, \Sigma P(\beta)\, \overline{N}_{\alpha_1\alpha_2}\ldots \overline{N}_{\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}} \overline{N}_{\beta_1\beta_2}\ldots \overline{N}_{\beta_{2m-1}\beta_{2m}} \times$$

$$\times\, \overline{N}_{\alpha_{2m+1}\beta_{2m+1}}\ldots \overline{N}_{\alpha_S\beta_S}\Big\},$$

остальные коммутаторы равны нулю.

Совершая в этих соотношениях преобразование Фурье, получим:

$$[A^{(-)}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(x),\quad A^{*(+)}_{\beta_1\ldots\beta_S}(y)]_- =$$

$$= [A^{*(-)}_{\alpha_1\ldots\alpha_S}(x),\quad A^{(+)}_{\beta_1\ldots\beta_S}(y)]_- =$$

$$= \frac{(-1)^S}{S!}\Big\{\Sigma P(\beta)\, N_{\alpha_1\beta_1}\ldots N_{\alpha_S\beta_S} +$$

$$+ \frac{1}{S!}\sum_{m=1}^{\frac{S}{2},\ \frac{S-1}{2}} B^S_m\, \Sigma P(\alpha)\, \Sigma P(\beta)\, N_{\alpha_1\alpha_2}\ldots N_{\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}} N_{\beta_1\beta_2}\ldots N_{\beta_{2m-1}\beta_{2m}} \times$$

$$\times\, N_{\alpha_{2m+1}\beta_{2m+1}}\ldots N_{\alpha_S\beta_S}\Big\}\, \frac{1}{i}\, D^{(-)}(x-y),$$

остальные коммутаторы равны нулю, где

$$N_{\alpha\beta} \equiv g^{\alpha\beta} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta},$$

$$D^{(-)}(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{-ik(x-y)}}{2k^\circ} d\mathbf{k}.$$

Учитывая, что член в фигурных скобках в (27) не меняется при замене $\alpha \to \beta$, $\beta \to \alpha$, и учитывая свойство

$$-D^{(-)}(-x) = D^{(+)}(x),$$

получим

$$[A_{\alpha_1 \ldots \alpha_S}(x), \quad A^*_{\beta_1 \ldots \beta_S}(y)]_- = [A^*_{\alpha_1 \ldots \alpha_S}(x), \quad A_{\beta_1 \ldots \beta_S}(y)]_- =$$

$$= \frac{(-1)^S}{S!} \Big\{ \Sigma P(\beta) N_{\alpha_1\beta_1} \ldots N_{\alpha_S\beta_S} + \tag{28}$$

$$+ \frac{1}{S!} \sum_{m=1}^{\frac{S}{2}, \frac{S-1}{2}} B^S_m \Sigma P(\alpha) \Sigma P(\beta) N_{\alpha_1\alpha_2} \ldots N_{\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}} \times$$

$$\times N_{\beta_1\beta_2} \ldots N_{\beta_{2m-1}\beta_{2m}} N_{\alpha_{2m+1}\beta_{2m+1}} \ldots N_{\alpha_S\beta_S} \Big\} \frac{1}{i} D(x-y).$$

Остальные коммутаторы равны нулю. (Здесь $D(x-y)$ — перестановочная функция Паули—Йордана.)

Положительная определенность энергии очевидна.

Фирц [1] указал релятивистски инвариантные перестановочные соотношения, совместные с квантовомеханическим уравнением движения, но последовательного квантования в его работе не проведено. Его перестановочные соотношения содержат лишь первый член из суммы $\sum_{m=1}^{\frac{S}{2}, \frac{S-1}{2}}$, поэтому они несправедливы для $S > 3$. Нами проведено последовательное квантование, максимально приближенное к каноническому, и перестановочные соотношения (28) справедливы для любого целого спина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fierz M. Helv. Phys. Acta, **12**, 3, 1939.
2. Dirac P. A. M. Proc. Roy. Soc., **A 155**, 447, 1936.
3. Fierz M., Pauli W. Proc. Roy. Soc., **A 173**, 211, 1939.
4. Chang S. I. Phys. Rev., **148**, 1259, 1966.
5. Aurilia A., Umezawa H. Phys. Rev., **182**, 1682, 1969.
6. Chiang C. C. Progr. theoret. Phys., **45**, 1311, 1971.
7. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1957.
8. Gupta S. Proc. Roy. Soc., **A 63**, 681, 1950.
9. Bleuler K. Helv. Phys. Acta, **23**, 567, 1950.

Поступила в редакцию
27.11 1972 г.

Кафедра
квантовой статистики