

Б. К. НОВИКОВ, С. И. СОЛЮЯН

ИЗМЕНЕНИЕ СПЕКТРА ОДИНОЧНЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

Найдено выражение, определяющее спектры периодических и одиночных сигналов произвольной формы на расстояниях, меньших расстояния разрыва, с любой степенью точности при распространении в нелинейной среде без учета диссипации. В указанном интервале расстояний вычислены спектры гауссова и треугольного сигналов. Для расстояний, больших расстояния разрыва, найден спектр треугольного одиночного сигнала и на основе полученного выражения найдена приближенная формула для спектра гауссова сигнала.

Изучение изменения спектра сигнала произвольной формы при распространении в нелинейной среде проводилось в работах [1—4]. В этих работах были установлены такие нелинейные явления, как расширение спектров, выравнивание спектральной плотности немонахроматического сигнала [1], сдвиг максимума спектра в область низких частот и уменьшение «эффективной ширины» спектра за счет диссипативных эффектов при малых числах Рейнольдса [2]. Расчеты в работах [1—4] проводились на основе приближенных методов, связанных с ограничением расстояния распространения сигнала от входа системы.

В настоящей работе рассматривается изменение спектра одиночных и периодических сигналов произвольной формы для любых расстояний от излучателя z в такой среде, когда диссипативные эффекты пренебрежимо малы по сравнению с нелинейными. Произвольность расстояний означает, что нелинейный параметр $\sigma = (\epsilon/c_0^2) \omega_0 v z$ (где $\epsilon = (\gamma + 1) 2$, γ — показатель адиабаты, v_0 — «амплитуда» сигнала и ω_0 — некоторая константа, имеющая размерность частоты) не может считаться малым, как это принималось в работах [1—4]. Проведенные вычисления, связанные с разложением по этому параметру, позволили найти спектр сигнала произвольной формы с любой степенью точности. Без учета диссипативных эффектов распространение сигнала в нелинейной среде в «сопровождающей» системе координат [5] имеет вид

$$\frac{dv}{dz} - \frac{\epsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0, \quad (1)$$

где $\tau = t - z/c_0$, t — время, v — гидродинамическая скорость. Пусть на входе системы (при $z=0$) возмущение скорости имеет вид

$$z = 0, \quad \frac{v}{v_0} = f(\omega_0 t). \quad (2)$$

Решение уравнения (1) при условии (2) запишется в виде

$$\frac{v}{v_0} = f\left(\omega_0 \tau + \sigma \frac{v}{v_0}\right). \quad (3)$$

Чтобы найти изменение спектра одиночного сигнала, необходимо вычислить интеграл Фурье от неявной функции (3). От неявного характера подынтегральной функции можно избавиться, сделав замену переменных:

$$\xi = \omega_0 \tau + \sigma \frac{v}{v_0}, \quad \tau = \frac{\xi - \sigma f(\xi)}{\omega_0}. \quad (4)$$

При этом получается интеграл следующего вида:

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)_\omega = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i \frac{\omega}{\omega_0} [\xi - \sigma f(\xi)]} [1 - \sigma f'(\xi)] d\xi. \quad (5)$$

В силу того, что $f(\xi)$ стремится к нулю при $\xi \rightarrow \pm \infty$, пределы интегрирования не изменяются. Даже для довольно простых функций $f(\xi)$

точно взять интеграл (5) затруднительно. Разложив $e^{i \frac{\omega}{\omega_0} \sigma f(\xi)}$ по степеням σ и подставив полученное разложение в формулу (5), мы значительно упростим интеграл. Интеграл (5) будет эквивалентен сумме более простых интегралов

$$\begin{aligned} \left(\frac{v}{v_0}\right)_\omega = \frac{1}{\omega_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega\sigma)^n}{n! \omega_0^n} \int_{-\infty}^{\infty} f^{n+1}(\xi) e^{i \frac{\omega}{\omega_0} \xi} d\xi - \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega)^n \sigma^{n+1}}{\omega_0^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} f^{n+1}(\xi) e^{i \frac{\omega}{\omega_0} \xi} f'(\xi) d\xi \right]. \quad (6) \end{aligned}$$

Преобразуя интегралы второй суммы по частям, получим соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{n+1}(\xi) e^{i \frac{\omega}{\omega_0} \xi} f'(\xi) d\xi = - \frac{i\omega}{(n+2)\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} f^{n+2}(\xi) e^{i \frac{\omega}{\omega_0} \xi} d\xi. \quad (7)$$

Используя соотношение (7), легко преобразовать формулу (6) к виду, содержащему одну сумму подобных интегралов:

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)_\omega = \frac{1}{\omega_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega\sigma)^n}{\omega_0 (n+1)!} \int_{-\infty}^{\infty} f^{n+1}(\xi) e^{i \frac{\omega}{\omega_0} \xi} d\xi. \quad (8)$$

Действительная и мнимая части легко разделяются, если $f(\xi)$ — четная или нечетная функция. Если $f(\xi)$ — четная функция, то и степени этой функции будут также четными и выражение (8) запишется в виде

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)_\omega = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega\sigma)^{2k}}{(2k+1)! \omega_0^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{2k+1}(\xi) \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} \xi\right) d\xi +$$

$$+ \frac{i}{\omega_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega\sigma)^{2k-1}}{(2k)! \omega_0^{2k-1}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{2k}(\xi) \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} \xi\right) d\xi. \quad (9)$$

Если $f(\xi)$ — нечетная функция, то ее степени $f^n(\xi)$ — четные при четном n и нечетные при нечетном n .

В этом случае вместо формулы (8) имеем

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)_\omega = \frac{i}{\omega_0} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega\sigma)^{2k}}{(2k+1)! \omega_0^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{2k+1}(\xi) \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0} \xi\right) d\xi + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega\sigma)^{2k-1}}{(2k)! \omega_0^{2k-1}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{2k}(\xi) \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} \xi\right) d\xi. \quad (10)\right.$$

Полученные формулы (9)–(10) позволяют найти спектр произвольного сигнала для любого значения σ с необходимой степенью точности. Но, с другой стороны, уравнение (2) справедливо только до момента начала образования разрыва $\sigma = \sigma_p$, и, следовательно, полученные формулы будут справедливы лишь для значений $\sigma < \sigma_p$. Поэтому, чтобы найти границу применения полученных формул, найдем σ_p .

Для определения σ_p вычислим производную $dv/d\tau$:

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{\omega_0 f'(\xi)}{1 - \sigma f'(\xi)}. \quad (11)$$

В точке разрыва $dv/d\tau = \infty$ и как следует из формулы (11), ей соответствует значение $\sigma_p = 1/f'_{\max}$. Если при ξ_0 значение $f'(\xi)$ максимально, то значение v/v_0 , при котором наступает разрыв, находится из условия $v/v_0 = f(\xi_0)$.

Воспользовавшись рассмотренной теорией, исследуем изменение спектра одиночного гауссова сигнала. В этом случае решение уравнения (1) имеет вид

$$\frac{v}{v_0} = e^{-(\omega_0 \tau + \sigma v/v_0)^2}. \quad (12)$$

Подставляя решение (12) в формулу (9), найдем спектр гауссова сигнала. Для нахождения спектра интенсивности необходимо брать модуль полученного выражения, предварительно сделав замену ω_0 на $\sqrt{2}\omega_0$ и σ на $\sqrt{2}\sigma$. Спектр интенсивности запишется в виде

$$I_\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{\omega_0} \left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega\sigma)^{2k}}{\omega_0^{2k} (2k+1)! \sqrt{2k+1}} e^{-\frac{\omega^2}{2\omega_0^2 (2k+1)}} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega\sigma)^{2k-1}}{\omega_0^{2k-1} \sqrt{2k}} e^{-\frac{\omega^2}{4\omega_0^2 k}} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (13)$$

Графики спектра гауссова сигнала представлены на рис. 1. Из графиков видно, что с ростом σ происходит перекачка энергии низко-

частотной части спектра в ее высокочастотную часть. Это справедливо для значений $\sigma < \sigma_p = \frac{e^{1/2}}{\sqrt{2}} \approx 1,17$. Соответственно значение v/v_0 , при котором наступает разрыв, равно $e^{-1/2} = 0,605$. Подобная работа по изучению спектра гауссова сигнала уже приводилась [2] в рамках линейного приближения. Если в полученной формуле (13) (считая $\sigma \ll 1$) оставить только максимальные по σ члены, т. е. пропорциональные σ^2 , то коэффициенты перед этими членами в выражении для интенсивности в формуле (13) и полученные в работе [2] не будут совпадать. Это связано с тем, что линейное приближение при нахождении спектра интенсивности не всегда дает правильные результаты, даже при $\sigma \ll 1$ (в частности, когда начальный сигнал имеет симметричный профиль). За изменением фронта гауссова сигнала до и после разрыва можно проследить по графику на рис. 2, построенному для четырех значений σ .

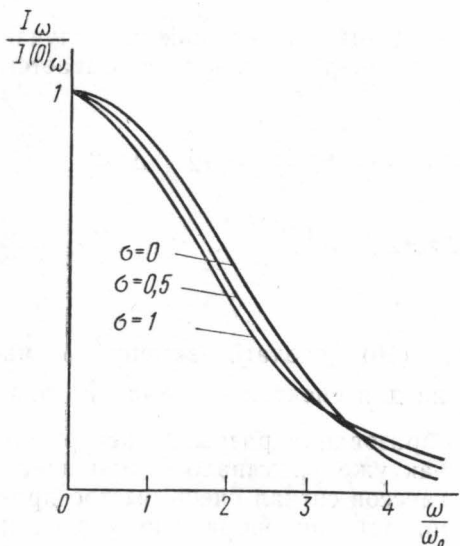


Рис. 1

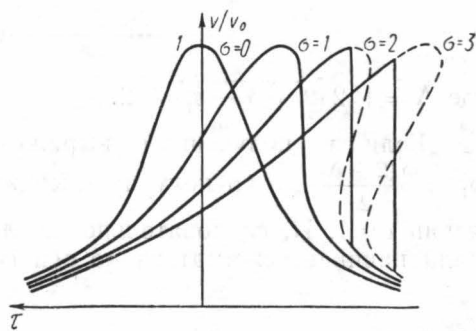


Рис. 2

До начала образования разрыва спектр найден, а после образования разрыва можно его найти, если заменить искаженный сигнал сигналом пилообразного профиля. Поэтому проследим за изменением спектра сигнала треугольной формы, заданного в точке $z=0$ в виде

$$\frac{v}{v_0} = \begin{cases} 1 + \frac{\tau}{\tau_0} & -\tau_0 \leq \tau \leq 0 \\ 1 - \frac{\tau}{\tau_0} & 0 \leq \tau \leq \tau_0. \end{cases} \quad (14)$$

На рис. 3 построены графики профиля сигнала (14) на различных расстояниях от входа системы, т. е. при различных значениях σ . При $0 < \sigma < 1$ происходит только изменение формы сигнала. При $\sigma > 1$ фронт сигнала становится ударным. Изменение спектра треугольного импульса при значениях $0 < \sigma < 1$ описывается формулой

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)_\omega = \frac{4}{\tau_0^2(1+\sigma)^2 \omega^4} \left[\sin^2 \omega \tau_0 + \frac{4}{(1-\sigma)^2} \sin^2 \frac{1}{2} \times \right.$$

$$\times \omega \tau_0 (1 - \sigma) - \frac{4}{1 + \sigma} \sin \omega \tau_0 \sin \frac{1}{2} \omega \tau_0 (1 - \sigma) \cos \frac{1}{2} \omega \tau_0 (1 + \sigma) \Big]. \quad (15)$$

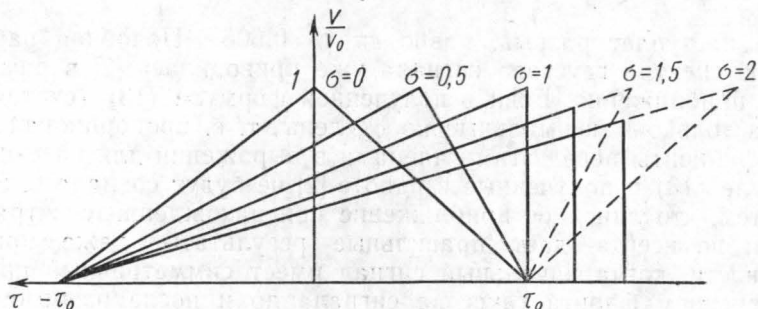


Рис. 3

Трансформация спектра здесь происходит так же, как и в случае гауссова сигнала. При значениях $\sigma \geq 1$ спектр сигнала описывается по закону

$$\left(\frac{v}{v_0} \right)_{\omega} = \frac{4}{\tau_0^2 (2 + \Delta)^4} \left[\frac{\tau_0^2 (2 + \Delta)^2}{\omega^2} + \frac{4}{\omega^4} \sin^2 \frac{1}{2} \omega \tau_0 (2 + \Delta) - \frac{2\tau_0 (2 + \Delta)}{\omega^3} \sin \omega \tau_0 (2 + \Delta) \right], \quad (16)$$

где $\Delta = \sqrt{2(2 + \sigma - \sigma_p)} - 2$.

Если в полученном выражении (16) сделать замену ω на $\omega_1 = \frac{\omega(2 + \Delta)}{2}$, то получим выражение для спектра сигнала при значении $\sigma = 1$. И, следовательно, после образования разрыва спектр сигнала начинает сжиматься по оси ω . Как уже указывалось, при $\sigma > \sigma_p$ гауссов сигнал очень быстро принимает пилообразную форму, и поэтому можно считать полученную для треугольного сигнала форму спектра справедливой и для спектра гауссова сигнала.

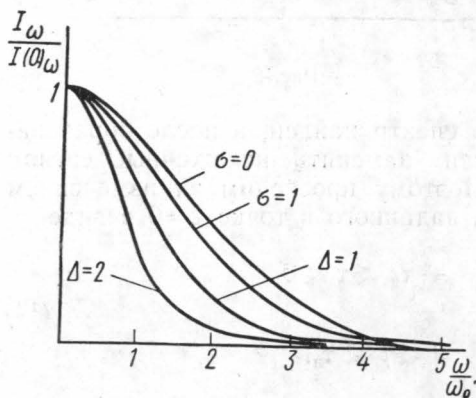


Рис. 4

Изменение спектра треугольного импульса представлено на рис. 4. Полученные результаты легко перенести на случай периодических сигналов произвольной формы. Для этого воспользуемся решением (3) уравнения (1), придав константе ω_0 смысл частоты периодического сигнала

$$\frac{v_1}{v_0} = f \left(\omega_0 \tau + \sigma \frac{v}{v_0} \right). \quad (17)$$

Интеграл для определения коэффициентов Фурье запишем в пределах от a до $a + \frac{2\pi}{\omega_0}$, причем a удовлетворяет условию $f(a\omega_0) = 0$. Это требование не является обязательным, но в случае его выполнения при

замене переменных не меняются пределы интегрирования, а также значительно упрощается вид конечного выражения. Повторяя выкладки, проделанные выше для случая одиночных сигналов, приходим к выражению

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\sigma_n)^k}{k!} \int_a^{a+\frac{2\pi}{\omega_0}} f^{k+1}(\xi) e^{in\xi} d\xi, \quad (18)$$

где a_n и b_n — коэффициенты Фурье.

В качестве примера найдем спектр периодического синусоидального сигнала. Вычисляя коэффициенты по формуле (18), приходим к выражению

$$b_n = \frac{2}{n\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{n\sigma}{2}\right)^{n+2k} = \frac{I_n(n\sigma)}{n\sigma}. \quad (19)$$

Формула (19) в точности совпадает с коэффициентами в известном решении Бесселя—Фубини [1]. В то же время формула (18) позволяет вычислить спектр любой периодической функции с требуемой степенью точности в пределах, в которых справедливо приближенное уравнение (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зарево Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику.
2. Шехлинская Р. Э. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астроном., 12, 52, 1972.
3. Кузнецов В. П. «Акустический журнал» 16, 155, 1972.
4. Максимов Б. И. «Об изменении спектра немонохроматической волны в диссипативной среде». Труды МИНХа, вып. 96, 1970, стр. 111.
5. Солуян С. И., Хохлов Р. В. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астроном., № 3, 52, 1961.

Поступила в редакцию
24.11 1972 г.

Кафедра
волновых процессов