

# Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 5 — 1974

УДК 521.6

С. Н. ВАШКОВЬЯК

## ФУНКЦИЯ ТЕНИ В ЗАДАЧЕ О ВЛИЯНИИ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ НА ДВИЖЕНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

Функция тени  $\Psi$  представляется в виде ряда по полиномам Лежандра, что позволяет достаточно просто выразить эту функцию в зависимости от элементов промежуточной орбиты спутника. В качестве промежуточной орбиты выбрано решение обобщенной задачи двух неподвижных центров, причем за независимую переменную принимается истинная аномалия спутника. Для функций наклона  $F_{n,j,i}$ , от которых зависит  $\Psi$ , выведены рекуррентные соотношения.

Интерес к изучению влияния светового давления на движение ИСЗ возник после появления спутников-баллонов с большим отношением «поверхность — масса». В дальнейшем выяснилось, что этот эффект необходимо принимать во внимание при определении постоянных, характеризующих фигуру Земли, атмосферу и т. п., по движению ИСЗ. Изучение возмущений, вызванных световым давлением, не представляет труда, если не принимать во внимание тень Земли. В общем случае, т. е. с учетом тени, возникают большие трудности, обусловленные разрывностью возмущающей силы. Очень интересной оказалась идея F. Mello [1, 2], предложившего ввести так называемую «функцию тени». Эта функция равна единице в том случае, когда спутник освещен Солнцем, и нулю в противном случае. Ту же идею использовали P. Lala и L. Sehnal [3—5] при изучении короткопериодических возмущений элементов орбиты спутника от светового давления.

Настоящая работа посвящена изучению функции тени нового вида, которая в дальнейшем будет использована для аналитического исследования вышеназванного эффекта. При решении настоящей задачи делаются следующие предположения: мощность потока солнечной радиации постоянна, а сила светового давления всегда направлена по линии Земля — Солнце; орбита Земли круговая; тень цилиндрическая с осью, направленной по линии Земля — Солнце; спутник сферический. Ошибка от этих предположений по оценке [1] составляет около 3%. В настоящей работе вводится еще одно ограничение на эксцентриситеты орбит спутников, от которого в дальнейшем мы постараемся освободиться.

## Постановка задачи

Рассмотрим прямоугольную геоцентрическую экваториальную систему координат  $Oxyz$ .  $\vec{r}$  — радиус-вектор спутника,  $\vec{u}$  — единичный вектор, направленный по линии Земля — Солнце, противоположно направлению на Солнце. Возмущающее ускорение, действующее на спутник, есть  $\vec{\rho} = \rho \vec{u}$ , где  $\rho = k P_0 \frac{A}{m_0}$ . Здесь  $A$  и  $m_0$  — площадь поперечного сечения и масса спутника,  $P_0$  — постоянная, равная  $4,63 \cdot 10^{-5}$  дин/см<sup>2</sup>,  $k$  — коэффициент, характеризующий отражательные свойства спутника, его численная величина заключена между 1 и 1,44. Силовая функция определяется выражением

$$R' = \rho r \cos \lambda,$$

где  $\lambda$  — угол между осью цилиндра тени и радиусом-вектором спутника

$$\cos \lambda = - \left( \frac{x}{r} \cos \theta + \frac{y}{r} \sin \theta \cos \varepsilon + \frac{z}{r} \sin \theta \sin \varepsilon \right),$$

$\theta$  — средняя долгота Солнца,  $\varepsilon$  — наклон экватора к эклиптике,  $x, y, z$  — прямоугольные координаты спутника. Геометрическая картина представлена на рис. 1. Орбита спутника пересекает цилиндр тени в точках  $E_1$  и  $E_2$ :

$$\varphi = \arcsin \left( \frac{r_0}{r} \right), \quad (1)$$

где  $r_0$  — экваториальный радиус Земли.

За промежуточную орбиту спутника примем орбиту, получаемую на базе обобщенной задачи двух неподвижных центров. Эта орбита учитывает вторую, третью и часть четвертой зональной гармоники потенциала Земли [6]. Представим  $R'$  в виде непрерывной функции элементов орбиты и независимой переменной, в качестве которой выберем истинную аномалию спутника. Если бы ИСЗ был все время освещен Солнцем, для определения возмущений первого порядка промежуточной орбиты достаточно было бы  $R'$  подставить в уравнение

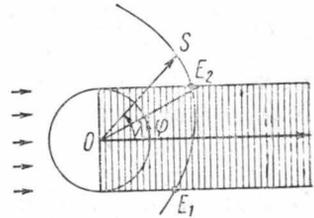


Рис. 1. Геометрическая картина

возмущенного движения, взятые, например, из [7], и проинтегрировать в первом приближении эти уравнения. Однако, если спутник какое-то время находится в тени, возмущения будут отличаться от возмущений, найденных описанным выше способом. Умножим правые части уравнений возмущенного движения на функцию тени  $\Psi$ , которая равна 1, если спутник освещен Солнцем, и нулю в противном случае:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dv} &= 2a^2 \left( \frac{\partial R}{\partial v} + \frac{\partial R}{\partial u} \right) \Psi, \\ \frac{de}{dv} &= \frac{p}{e} \left\{ \frac{\partial R}{\partial v} + \frac{\partial R}{\partial u} - (1 - e^2) \frac{\partial F}{\partial u} \right\} \Psi, \\ \frac{di}{dv} &= \frac{p}{\sin i} \left( \cos i \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial \Omega} \right) \Psi, \\ \frac{d\Omega}{dv} &= \mu + \frac{p}{\sin i} \frac{\partial F}{\partial i} \Psi, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{du}{dv} = 1 + v - \rho \frac{\cos i}{\sin i} \frac{\partial F}{\partial i} \Psi.$$

Здесь  $F = \frac{r^3}{\rho^3} R$ ,  $R = \frac{R'}{fm}$ ,  $m$  — масса Земли,  $f$  — гравитационная постоянная,  $\rho$ ,  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $u$  — элементы промежуточной орбиты спутника ( $u$  — аналог аргумента широты),  $\mu$ ,  $v$  — постоянные, зависящие от элементов промежуточной орбиты, которые характеризуют изменение  $\Omega$  и  $u$  за счет нецентральности гравитационного поля Земли. Функцию  $\Psi(\cos \lambda)$ , заданную в промежутке  $-1 \leq \cos \lambda \leq 1$ , можно разложить в ряд по полиномам Лежандра:

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \lambda), \quad (3)$$

где  $a_n$  определяется известным образом:

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \Psi(\cos \lambda) P_n(\cos \lambda) \sin \lambda d\lambda.$$

Промежуток  $[0, \pi]$  разбиваем на следующие:  $[0, \varphi]$  и  $[\varphi, \pi]$ . В первом интервале  $\Psi=0$ , во втором  $\Psi=1$ . Используя соотношения для полиномов Лежандра

$$(2n+1) P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x), \quad P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n,$$

находим для  $n > 1$

$$a_n = \frac{1}{2} [P_{n+1}(\cos \varphi) - P_{n-1}(\cos \varphi)],$$

а для  $n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \varphi.$$

В нижней полуплоскости картина будет аналогичная. Разложение (3) плохо сходится при  $\lambda=0$ . Чтобы это устранить, преобразуем функцию  $\Psi$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi &= a_0 P_0(\cos \lambda) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos \lambda) P_{n+1}(\cos \varphi) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos \lambda) P_{n-1}(\cos \varphi). \end{aligned}$$

Заменяя в первой сумме индекс суммирования  $n$  на  $n-2$  и объединяя общие члены в обеих суммах, окончательно получаем

$$\Psi = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(\cos \varphi) [P_{n-2}(\cos \lambda) - P_n(\cos \lambda)], \quad (4)$$

причем  $P_{-n-1}(\cos \lambda) = P_n(\cos \lambda)$ . При  $\lambda=0$  функция тени, задаваемая формулой (4), тождественно равна нулю, что соответствует случаю, когда спутник находится на оси цилиндра тени. При  $-\varphi < \lambda < \varphi$  спут-

ник не освещается Солнцем и функция тени равна 0, для остальных углов  $\lambda \Psi = 1$ .

### $P_n(\cos \varphi)$ как функции истинной аномалии спутника

Из соотношения (1) вытекает, что  $\sin \varphi = \frac{s_0}{a(1-e^2)}(1 + e \cos v)$ .

Сохраним в разложении функции  $\cos \varphi$  в ряд по степеням эксцентриситета члены до  $e^2$  включительно и представим эту функцию в виде

$$\cos \varphi = A_0 - A_1 e,$$

где

$$A_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{p}\right)^2}, \quad A_1 = \cos v \frac{\left(\frac{r_0}{p}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{p}\right)^2}} + \frac{1}{2} \frac{e \cos^2 v \left(\frac{r_0}{p}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{r_0}{p}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Полиномы Лежандра от  $\cos \varphi$  можно разложить в ряд Тейлора в окрестности  $\cos \varphi_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{p}\right)^2}$  и сохранить члены второго порядка относительно  $e$ :

$$P_n(\cos \varphi) = P_n(\cos \varphi_0) - \left. \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d(\cos \varphi)} \right|_{\varphi=\varphi_0} \cdot A_1 e + \\ + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 P_n(\cos \varphi)}{d(\cos \varphi)^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} \cdot A_1^2 e^2.$$

Примем во внимание рекуррентные соотношения для  $P_n(\cos \varphi)$ , а также дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют полиномы Лежандра. Окончательно приходим к следующему:

$$P_{n-1}(\cos \varphi) = d_0^{n-1} + d_1^{n-1} \cos v + d_2^{n-1} \cos 2v,$$

$$d_1^{n-1} = -neP_{n-1}(\cos \varphi_0) + \frac{ne}{\sqrt{1-\alpha^2}} P_n(\cos \varphi_0),$$

$$d_2^{n-1} = \frac{ne^2 [1 - \alpha^2 (n+1)]}{4(1-\alpha^2)} P_{n-1}(\cos \varphi_0) - \frac{ne^2 (1-2\alpha^2)}{4(1-\alpha^2)^{3/2}} P_n(\cos \varphi_0), \quad (5)$$

$$d_0^{n-1} = P_{n-1}(\cos \varphi_0) + d_2^{n-1}.$$

Здесь  $\alpha = \frac{r_0}{p} = \frac{r_0}{a(1-e^2)}$ . Таким образом, коэффициенты  $d_s^{n-1}$  пропорциональны  $e^s$ ,  $s = 0, 1, 2$ . С помощью рекуррентных соотношений для полиномов Лежандра легко найти аналогичные формулы для коэффициентов  $d_s^{n-1}$ :

$$nd_1^{n+1} - \sqrt{1-\alpha^2} (2n+1) d_1^n + (n+1) d_1^{n-1} = 0,$$

$$d_2^{n+1} - \frac{e [1 + n(1-\alpha^2)]}{4(1-\alpha^2)} d_1^{n+1} + \frac{e(n+2)}{4\sqrt{1-\alpha^2}} d_1^n = 0, \quad (6)$$

$$d_0^{n+1} - d_2^{n+1} - \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{(n+1)e\alpha^2} [d_1^n - \sqrt{1-\alpha^2} d_1^{n+1}] = 0.$$

$\nu^\circ$	$\lambda^\circ$	$N = 13$	$N = 26$	$N = 62$
0	-159,32	1,014	1,001	1,000
30	-129,88	1,029	0,996	0,998
60	-100,08	1,047	0,988	0,995
90	-70,24	1,068	1,012	0,998
120	-40,49	-0,019	-0,030	-0,010
150	-11,69	0,002	-0,012	-0,003
180	20,67	-0,012	0,010	0,002
210	50,12	-0,035	-0,024	-0,010
240	79,92	1,022	1,029	1,012
270	109,76	0,985	1,006	1,003
300	139,51	0,979	0,998	1,000
330	168,31	0,988	1,000	1,000
360	200,68	1,014	1,001	1,000

Для начала счета необходимо знать:

$$d_0^0 = 1, \quad d_1^0 = d_2^0 = 0,$$

$$d_0^1 = \sqrt{1 - \alpha^2} - \frac{e^2 \alpha^2}{4(1 - \alpha^2)^{3/2}}, \quad d_1^1 = -\frac{e \alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

### $P_n(\cos \lambda)$ как функции истинной аномалии спутника

При разложении возмущающей функции в спутниковых задачах [8] приводится выражение для  $P_n(\cos H)$  как функции элементов орбиты спутника и возмущающего тела

$$P_n(\cos H) = \sum_{l, l', j=0}^n (2 - \delta_{j,0}) \frac{(n-j)!}{(n+j)!} F_{n,j,l} F'_{n,j,l'} \times$$

$$\times \cos [(n-2l)u - (n-2l')u' + j(\Omega - \Omega')]. \quad (7)$$

Здесь  $\delta_{j,0} = \begin{cases} 0 & j \neq 0 \\ 1 & j = 0 \end{cases}$ ,  $i$  и  $i'$  — наклоны орбит возмущаемого и возмущающего тел к плоскости экватора,  $u$  и  $u'$  — аргументы широты,  $\Omega$  и  $\Omega'$  — долготы восходящих узлов орбит спутника и возмущающего тела. Коэффициенты  $F_{n,j,l}$  сводятся к вычислению гипергеометрических полиномов от  $\sin^2 i/2$ . При  $i$ , близком к 0 или 180°, легко определить порядок малости соответствующих коэффициентов  $F_{n,j,l}$  с помощью равенства

$$F_{n,j,l}(i) = O((\sin i/2)^{|n-j-2l|} (\cos i/2)^{|n+j-2l|}).$$

Очевидно, что  $\cos \lambda = -\cos H$ , поэтому выражение (7) даст  $P_n(\lambda)$ , если положить  $i' = \varepsilon$ ,  $u' = \theta$ ,  $\Omega' = 0$  и добавить множитель  $(-1)^n$ :

$$P_n(\cos \lambda) = \sum_{l, l', j=0}^n (2 - \delta_{j,0}) (-1)^n C_{n-l-l', l'-l, j}^{(n)}(i, \varepsilon) \times$$

$$\times \cos [(n-2l)u - (n-2l')\theta + j\Omega],$$

где

$$C_{n-l-l', l'-l, j}^{(n)}(i, \varepsilon) = \frac{(n-j)!}{(n+j)!} F_{n,j,l}(i) F_{n,j,l'}(\varepsilon).$$

Так как функции  $F_{n,j,l}$  связаны с обобщенными функциями Лежандра  $P_{j,n-2l}^n$ :

$$P_{j,n-2l}^n(\cos i) = (\sqrt{-1})^{j+n-2l} \sqrt{\frac{(n-j)!(2l)!}{(n+j)!(2n-2l)!}} \times \\ \times (-1)^{n-E\left(\frac{n-j}{2}\right)} \frac{2^n l! (n-l)!}{(2l)!} F_{n,j,l}(i),$$

то для  $F_{n,j,l}$  легко получить следующие рекуррентные соотношения:

$$(2n-2l+2)F_{n+1,j,l} = -\sin^2 \frac{i}{2} F_{n,j+1,l} + (-1)^{n-j} (n+j+1) \sin i F_{n,j,l} + \\ + (n+j)(n+j+1) \cos^2 \frac{i}{2} F_{n,j-1,l},$$

$$F_{n+1,j+1,n+1} = (-1)^{n-j+1} (n-j+1) \frac{\sin i}{1+\cos i} F_{n+1,j,n+1}, \quad (8)$$

$$F_{n+1,n+1,l+1} = \frac{n-l+1}{l+1} \cdot \frac{1-\cos i}{1+\cos i} F_{n+1,n+1,l}.$$

Составив выражение для  $P_{n-2}(\cos \lambda)$  и взяв разность  $P_{n-2}(\cos \lambda) - P_n(\cos \lambda)$ , приходим к функции тени  $\Psi$  в виде

$$\Psi = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \sum_{s=-2}^2 \sum_{l,l',j=0}^n \Delta_{s,0} (2-\delta_{j,0}) (-1)^n \Pi_{n-2l,n-2l',j}^{(n)}(i, \varepsilon) d_s^{n-1} \times \\ \times \cos[(n-2l+s)v + (n-2l)\omega + (n-2l')\theta + j\Omega]; \quad (9)$$

$$\Pi_{n-2l,n-2l',j}^{(n)}(i, \varepsilon) = \begin{cases} C_{n-l-l'-2,l'-l,j}^{(n-2)} - C_{n-l-l',l'-l,j}^{(n)} & l=1, \dots, n-1 \\ & l'=1, \dots, n-1 \\ & j=0, \dots, n-2 \\ C_{n-l-l',l'-l,j}^{(n)} & \text{для остальных значений } l, l', j. \end{cases}$$

Здесь  $\Delta_{s,0} = \begin{cases} 2 & s=0 \\ 1 & s \neq 0 \end{cases}$ ,  $\omega$  — аналог аргумента перигея в промежуточном движении,  $N$  — число сохраняемых членов в (3).

На рис. 2 изображен график функции  $\Psi$  в зависимости от величины угла  $v$  для  $\varphi=60^\circ$ , что соответствует большой полуоси  $\approx 7400$  км. Пунктирная кривая относится к функции  $\Psi$ , для которой в (9)  $N=13$ , сплошная кривая соответствует  $N=26$ . Таблица показывает поведение  $\Psi(v)$  в зависимости от числа членов, взятых в формуле (9).

Итак, мы получили  $\Psi$  как функцию элементов промежуточной орбиты и независимой переменной, за которую приняли истинную аномалию спутника. Представление функции тени в виде ряда по полиномам Лежандра аналогично разложению  $\Psi$  в ряд Фурье, но удобство заключается в том, что можно сразу записать коэффициенты  $\Pi_{n-2l,n-2l',j}^{(n)}$ , которые зависят от функций наклона  $F_{n,j,l}$ .

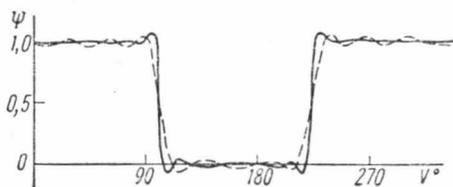


Рис. 2. Поведение функции тени в зависимости от истинной аномалии спутника

С помощью полученной функции тени и функции  $R'$ , выраженной через элементы промежуточной орбиты и независимую переменную, легко в первом приближении проинтегрировать уравнения (2) и определить возмущение элементов от светового давления.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mello F. XIV Congress IAF, Paris, 1963.
2. Mello F. Acad. Sc. Paris, 258, 1964.
3. L à la P. Bull. Astr. Czech., 19, No. 4, 1968.
4. L à la P., S e h n a l L. Bull. Astr. Czech., 20, 1969.
5. L à la P. Bull. Astr. Czech., 22, No. 2, 1971.
6. Аксенов Е. П. Сообщения ГАИШ, № 155, 1968.
7. Аксенов Е. П. Труды ГАИШ, 35, 1966.
8. Брумберг В. А. Бюллетень ИТА, 11, № 2, 1967.
9. Виленкин И. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., 1965.

Поступила в редакцию  
17.5 1972 г.

Кафедра  
небесной механики и гравиметрии

---