Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1974

УДК 521.6

В. П. ДОЛГАЧЕВ

ДОЛГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ПРИТЯЖЕНИЕМ ЛУНЫ

Содержатся выражения возмущений первого порядка элементов орбит ИСЗ от второй гармоники притяжения Луны, которая считается материальной точкой, движущейся по круговой орбите. В возмущающей функции рассматриваемой задачи сохранены члены до второй степени включительно относительно эксцентриситета орбиты спутника. Выведенные формулы пригодны и для анализа возмущений от Солнца.

В работе [1] были получены выражения для возмущений элементов орбит, обусловленные притяжением Луны, причем орбита спутника принималась близкой к круговой. Были получены вековые и долгопериодические возмущения в рамках указанной задачи, при этом, естественно, полученные формулы для долгопериодических возмущений справедливы для орбит с малым эксцентриситетом.

В настоящей работе рассматриваются долгопериодические возмущения от второй гармоники притяжения Луны, которая считается материальной точкой, движущейся по круговой орбите. Однако в возмущающей функции задачи сохранены члены, пропорциональные произведению квадрата эксцентриситета на отношение средних движений возмущающего тела и спутника.

Выведенные формулы для возмущений пригодны для орбит с любыми ненулевыми наклонениями и эксцентриситетом $0 \leqslant e < 1$.

§ 1. Постановка задачи

Выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс Земли так, чтобы плоскость xOy совпадала с плоскостью орбиты возмущающего тела (Луны), а ось Ox была направлена в перигей орбиты Луны.

Тогда, разлагая возмущающую функции задачи в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по полиномам Лежандра и ограничиваясь рассмотрением только второй гармоники, можно написать

$$R = \frac{\mu_L}{2} \frac{r^2}{r_L^3} (3\cos^2\psi - 1), \tag{1}$$

где

$$\cos\psi = \cos u \cos(\Omega - v_L) - \sin u \cos i \sin(\Omega - v_L),$$

$$\mu_L = f m_L, \; u = v + \omega,$$

f — постоянная тяготения, m_L — масса Луны, r, r_L — геоцентрические радиусы спутника и Луны, v, v_L — истинные аномалии спутника и Луны, ω — долгота перигея, i — наклонение, Ω — долгота восходящего узла орбиты спутника.

Если вместо $\cos\psi$ в R внести его выражение через кеплеровские элементы спутника и Луны, то R примет вид

$$R = \frac{1}{8} n_1^2 r^2 (3\cos^2 i - 1) + \frac{3}{8} n_1^2 r^2 \Big\{ \sin^2 i [\cos 2(\Omega - v_L) + \cos 2(v + \omega)] + $$

$$+ 2\sin^4 \frac{i}{2} \cos 2(v + v_L + \omega - \Omega) + 2\cos^4 \frac{i}{2} \cos 2(v - v_L + \omega - \Omega) \Big\}, \quad (2)$$

где

$$n_1^2 = \frac{\mu_L}{r_L^3}.$$

Если принять невозмущенную истинную аномалию спутника за новую независимую переменную, то уравнения Лагранжа для оскулирующих эллиптических элементов, пригодные для вычислений возмущений первого порядка, примут вид [2]:

$$\frac{da}{dv} = \frac{2}{n^2 a} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial M_0},$$

$$\frac{de}{dv} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{n^2 a^2 e} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{1}{n^2 a^2 e} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial \omega},$$

$$\frac{d\omega}{dv} = -\frac{\operatorname{ctg} i}{n^2 a^2 (1-e^2)} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{1}{n^2 a^2 e} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (3)$$

$$\frac{di}{dv} = \frac{\operatorname{ctg} i}{n^2 a^2 (1-e^2)} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{n^2 a^2 (1-e^2)\sin i} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial \Omega},$$

$$\frac{d\Omega}{dv} = \frac{1}{n^2 a^2 (1-e^2)\sin i} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial i},$$

$$\frac{dM_0}{dv} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{n^2 a^2 e} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{n^2 a \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\partial R}{\partial a}.$$

Здесь a — большая полуось, e — эксцентриситет, n — среднее движение и M_0 — средняя аномалия спутника в эпоху.

Время t связано с невозмущенной истинной аномалией следующим соотношением:

$$t - \tau = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{n} \int_0^v \frac{dv}{(1 + e\cos v)^2},$$

в котором τ — момент прохождения спутника через перигей.

§ 2. Выражение для возмущающей функции

Для вычисления средних аномалий ИСЗ и Луны на данный момент времени t служат известные формулы

$$M = M_0 + nt, \quad M_L = M_L^{(0)} + n_L t, \tag{4}$$

где n и n_L — среднее аномалистическое движение спутника и Луны, а M_0 и $M_L^{(0)}$ — средние аномалии в начальную эпоху. Обозначим отношение средних движений n_L и n через m:

$$m = \frac{n_L}{n}.$$

Исключая t из уравнений (4), получим $M_L = M_1 + mM$, где положено $M_1 = M_L^{(0)} - mM_0$.

Воспользовавшись уравнением центра и пренебрегая эксцентриситетом орбиты Луны, получим

$$v_L = M_1 + m\left(v - 2e\sin v + \frac{3}{4}e^2 \sin 2v + \dots\right) =$$
$$= M_1 + mv - 2em\sin v + \frac{3}{4}e^2 m \sin 2v + e^3 m f(v),$$

где $f(v)$ — ограниченная периодическая функция v.

В работе [1] истинная аномалия Луны v_L была представлена в виде $v_L = M_1 + mv$ и получены соответствующие такому представлению формулы для возмущений. В настоящей статье в формуле (5) отброшены члены, пропорциональные $e^3 m$, а ради краткости изложения в выражении возмущающей функции опущены слагаемые, рассмотренные в [1]. Тогда окончательное выражение для возмущающей функции примет вид

$$R_2 = \frac{3}{4} n_1^2 r^2 em \Big\{ \sin^2 i \Big[\cos(2mv - v + 2\alpha) - \cos(2mv + v + 2\alpha) +$$
$$+ \frac{3}{8} e(\cos 2(mv + v + \alpha) - \cos 2(mv - v + \alpha)) \Big] +$$
$$+ 2\sin^4 \frac{i}{2} \Big[\cos(2mv + v + 2\gamma) - \cos(2mv + 3v + 2\gamma) +$$
$$+ \frac{3}{8} e(\cos 2(mv + 2v + \gamma) - \cos 2(mv + \gamma)) \Big] +$$
$$+ 2\,\mathrm{sos}^4 \frac{i}{2} \Big[\cos(3v - 2mv + 2\xi) - \cos(v - 2mv + 2\xi) +$$
$$+ \frac{3}{8} e(\cos 2(mv - \xi) - \cos 2(mv - 2v - \xi)) \Big] \Big\}, \tag{5}$$

где

$$\alpha = M_1 - \Omega, \ \gamma = \omega - \Omega + M_1, \ \xi = \omega + \Omega - M_1.$$

§ 3. Формулы для возмущений

Вычислив соответствующие производные от R_2 по элементам и подставив их выражения в уравнения (3), получим систему дифференциальных уравнений движения спутника, в которых правые части являются функциями истинной аномалии v.

Воспользовавшись разложением в ряд Фурье выражений вида $\left(\frac{r}{p}\right)^n$ по кратным истинной аномалии v, будем иметь

$$\left(\frac{r}{p}\right)^n = M_n^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} 2M_n^{(k)}(e)\cos kv,$$

где

$$M_n^{(k)}(e) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+e\cos v)^{-n}\cos kv dv.$$

Интегрирование системы (3) в предположении, что в правых частях элементы орбиты заменены постоянными величинами, дает возмущение первого порядка:

$$a = a_0 + \delta a,\ e = e_0 + \delta e, \ \dots\ , M_0 = M_0^* + \delta M_0,$$

где $a_0, e_0, \dots, M_0^*$, — постоянные интегрирования, δa, $\delta e, \dots$, δM_0 — возмущения соответствующих элементов.

При интегрировании системы (3) сохранены периодические возмущения, период которых по v равен $\frac{2\pi}{m}$. Такие периодические возмущения будут соответствовать тем членам в R_2, для которых $k=n$ и в дальнейшем будут называться долгопериодическими возмущениями. Окончательные выражения для долгопериодических возмущений от Луны для всех шести элементов имеют вид:

$$\begin{gathered}
\delta a = 0,\\
\delta e = -\frac{3}{2}\left(\frac{n_1}{n}\right)^2\left(\frac{p}{a}\right)^4 T(b^4\eta + g^4\lambda),\\
\delta i = \frac{3}{2}\frac{eT}{\sin i}\left(\frac{n_1}{n}\right)^2\left(\frac{p}{a}\right)^3[\cos i(b^4\eta + g^4\lambda) - b^4\eta + g^4\lambda],\\
\delta\omega = -\cos i\cdot\delta\Omega + E,\\
\delta\Omega = \frac{3}{4}\left(\frac{n_1}{n}\right)^2\left(\frac{p}{a}\right)^3 eT(b^2\beta + g^2\mathrm{w}),\\
\delta M_0 = -\sqrt{1-e^2}E - 3\left(\frac{n_1}{n}\right)^2\left(\frac{p}{a}\right)^4 eT(b^4\beta - g^4\mathrm{w}),
\end{gathered}\tag{6}$$

где

$$T = M_4^{(1)} - M_4^{(3)} + \frac{3}{8}e(M_4^{(4)} - M_4^{(0)}),$$

$$\begin{aligned}
E = \frac{3}{4}\left(\frac{n_1}{n}\right)^2\left(\frac{p}{a}\right)^3(b^4\beta - g^4\mathrm{w})\Big\{\frac{1-e^2}{e}\left[T + \frac{3}{8}e(M_4^{(4)} - M_4^{(0)})\right] - \\
-\frac{1}{2}\Big[M_4^{(0)} + M_3^{(4)} + 3(M_3^{(0)} + M_4^{(4)}) - 4(M_3^{(2)} + M_4^{(2)}) + \\
+\frac{3}{4}e(3M_3^{(3)} - M_3^{(5)} + 2M_4^{(3)} - 2M_4^{(5)} - 2M_3^{(1)})\Big]\Big\},\quad b = \sin\frac{i}{2},
\end{aligned}$$

$$g = \cos\frac{i}{2}, \quad \eta = \cos 2(mv + \gamma),$$

$$\lambda = \cos 2(mv - \xi), \quad w = \sin 2(mv - \xi).$$

В выражения для возмущений элементов входят коэффициенты ряда Фурье вида $M_3^{(k)}$ и $M_4^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$).

Воспользовавшись рекуррентными формулами для коэффициентов $M_n^{(k)}$, полученными Е. П. Аксеновым [3], находим

$$M_3^{(0)} = \left(1 + \frac{e^2}{2}\right)(1-e^2)^{-5/2}, \quad M_3^{(1)} = -\frac{3}{2}e(1-e^2)^{-5/2},$$

$$M_3^{(2)} = -eM_3^{(1)}, \quad M_3^{(3)} = \frac{1}{e^3}\left[4 - (1-e^2)^{-5/2}\left(\frac{15}{2}e^4 - 10e^2 + 4\right)\right],$$

$$M_3^{(4)} = \frac{3}{e^4(1-e^2)^{5/2}}\left[15e^4 - 20e^2 + 8 - 8(1-e^2)^{5/2} - \frac{5}{2}e^6\right],$$

$$M_3^{(5)} = \frac{3}{2e^5}\left[(1-e^2)^{-5/2}(35e^6 - 140e^4 + 168e^2 - 64) + 8(8-e^2)\right],$$

$$M_4^{(0)} = \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-7/2}, \quad M_4^{(1)} = -\frac{1}{2}e(e^2+4)(1-e^2)^{-7/2}, \tag{7}$$

$$M_4^{(2)} = \frac{5}{2}e^2(1-e^2)^{-7/2}, \quad M_4^{(3)} = -eM_4^{(2)},$$

$$M_4^{(4)} = \frac{1}{e^4}\left[\left(\frac{35}{2}e^6 - 35e^4 + 28e^2 - 8\right)(1-e^2)^{-7/2} + 8\right],$$

$$M_4^{(5)} = 8\left[(1-e^2)^{-7/2}\left(\frac{35}{16}e^3 - \frac{35}{2}e + \frac{35}{e} - \frac{28}{e^3} + \frac{8}{e^5}\right) - \frac{8}{e^5}\right].$$

Переходя к краткому анализу полученных результатов, следует прежде всего отметить простую структуру полученных формул и, следовательно, простоту вычислительного алгоритма. В рамках рассматриваемой задачи величина возмущений любого элемента орбиты (кроме большой полуоси) зависит от величины эксцентриситета. Можно показать (это видно и из формул (7)), что $M_n^{(k)}$ имеет порядок e^k.

Поэтому возмущения эксцентриситета пропорциональны величине эксцентриситета орбиты, тогда как возмущения наклонения и долготы восходящего узла пропорциональны квадрату эксцентриситета.

Наибольшие возмущения в функции эксцентриситета испытывают элементы ω и M_0, так как в выражения для возмущений указанных элементов входят коэффициенты ряда Фурье нулевого порядка.

Возмущения элементов i и ω существенно зависят также и от величины наклонения. Если плоскость орбиты спутника перпендикулярна плоскости орбиты возмущающего тела, то возмущения указанных элементов в функции наклонения наименьшие, что не лишено физического смысла.

Если $i \to 0$ или $i \to \pi$, то возмущения элементов i и ω быстро растут, а формула (6) для δi при $i=0$, π становится непригодной.

В заключение необходимо отметить, что, приняв плоскость эклиптики за основную плоскость отсчета, можно по аналогии написать выражения для долгопериодических возмущений от Солнца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долгачев В. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 1, 94, 1968.
2. Чеботарев Г. А. Аналитические и качественные методы небесной механики. М., 1965.
3. Аксенов Е. П. «Тр. Ун-та Дружбы народов им. Патриса Лумумбы», математика, т. 21, вып. 2, 1967.

Поступила в редакцию
14.6 1973 г.

Кафедра
небесной механики и гравиметрии