

ЛИТЕРАТУРА

1. Шумшуров В. И. «Измерительная техника», № 10, 1971.
2. Антонова И. А., Писаренко Н. Ф., Савенко И. А., Шумшуров В. И. «Геомagnetизм и аэрoномия», 4, 1964.
3. Шумшуров В. И. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрoн., 12, № 6, 1972.
4. Теумин И. И. Справочник по переходным электрическим процессам. М., 1952.

Поступила в редакцию
15.5 1973 г.

НИИЯФ

УДК 62.501.1

А. В. ПЕРЕПЕЛИЦЫН, Ю. М. РОМАНОВСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В МОДЕЛЯХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

В последнее время в ряде работ исследуются автоколебания, в частности квазигармонические, в химических системах [1—2]. Поле изоклин-систем дифференциальных уравнений, которые моделируют их, существенно отличается от поля изоклин обычно рассматриваемого в радиотехнике генератора Ван-дер-Поля. Это видно на примере уравнений Хиггинса 1 (рис. 1). При расчете квазигармонических колебаний встречается ряд трудностей. В частности, система последовательных приближений в методах Пуанкаре или Боголюбова замыкается не в первом, а в высших приближениях. Вместе с тем при определенных соотношениях параметров этих генераторов поведение таких систем близко к поведению генератора Ван-дер-Поля. Это может служить основанием широкого применения системы Ван-дер-Поля при моделировании автоколебательных химических реакций [3 и 2] и их синхронизации в пространстве.

Уравнения Хиггинса описывают автоколебания некоторых метаболитов x и y в системе реакции гликолиза¹ и имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = 1 - xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = p \left(xy - \frac{q+1}{q+y} y \right). \quad (1)$$

Здесь $x(t)$ и $y(t)$ имеют смысл безразмерных концентраций. Главные изоклины системы (1) изображены на рис. 1. Если $\varepsilon = p/(q+1) - 1$ больше нуля, то в положительном квадранте у системы будет неустойчивая особая точка $(1, 1)$ и окружающий ее единственный предельный цикл.

Если величина ε будет малой, то в системе (1) колебания будут квазигармоническими. Их период будет равен $T = 2\pi/\sqrt{q}$. Преобразуем систему (1) к виду (2), разделив систему (1) относительно переменной $\eta = y - 1$ и разложив полученное уравнение по степеням η , η до третьего порядка

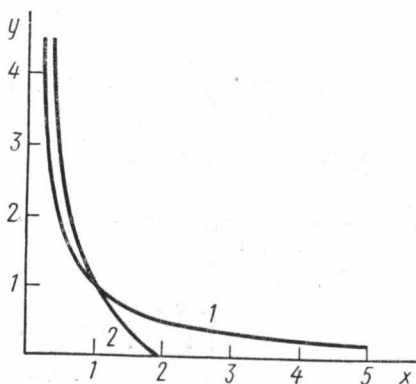


Рис. 1. Главные изоклины системы уравнений Хиггинса

¹ Гликолиз — биохимическая реакция окисления сахаров в отсутствии кислорода [1].

$$\ddot{\eta} + p \frac{q}{q+1} \eta = \left(\frac{p}{q+1} - 1 \right) \dot{\eta} - p \frac{q^2}{(q+1)^2} \dot{\eta} - \\ - \eta \dot{\eta} + \dot{\eta}^2 + p \frac{q-1}{(q+1)^2} \eta \dot{\eta} + p \frac{q^2}{(1+q)^3} \eta^3 - \eta \dot{\eta}^2 - \eta^2 \dot{\eta} p \frac{2q-1}{(q+1)^3}. \quad (2)$$

Согласно методике, описанной в [4], сделаем в (2) замену переменных $\eta = \sqrt{\varepsilon} x$ где $\varepsilon = p/(q+1) - 1$ — малый параметр, и представим (2) в виде

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \alpha z^2 + \beta z \dot{z} + \gamma z^2 + \varepsilon (z + Q_3) + \varepsilon^{3/2} Q_4 + \dots, \quad (3)$$

$$\text{где } Q_n = \sum_{l=1}^n a_{nl} z^l \dot{z}^{n-l}.$$

Коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \omega, a_{n,l}$ находятся при сопоставлении уравнений (2) и (3). Решение z согласно [4] ищется в виде ряда

$$z(t) = a \cos \psi + \varepsilon z_1(a, \psi) + \dots \quad (4)$$

Амплитуда a и фаза ψ первой гармоники автоколебаний находятся из следующих укороченных уравнений второго приближения:

$$\dot{a} = -\varepsilon \left(-\omega a + \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} Q_3 \sin \psi d\psi + a^2 \frac{\beta}{4\omega^2} (\alpha\omega^2 + \gamma) \right), \quad (5)$$

$$\dot{\psi} = \omega - \frac{\varepsilon}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} Q_3 \cos \psi d\psi + \frac{a^3 \varepsilon}{6\omega^2} \left(2a^2 \omega^4 + 5\gamma (\alpha\omega^2 + \gamma) + \frac{\beta\omega^2}{2} \right).$$

С помощью уравнений (5) получаем стационарные решения (при $\varepsilon \ll 1$ $p \sim q+1$)

$$x = 1 - \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2q+1}} (\sqrt{q} \sin \psi + \cos \psi) - \frac{4}{3} \frac{q+1}{2q+1} \varepsilon \cos 2\psi + \varepsilon \frac{(2-q)(q+1)}{3(2q+1)\sqrt{q}} \sin 2\psi, \quad (6)$$

$$y = 1 + \frac{2(q+1)}{\sqrt{2q+1}} \sqrt{\varepsilon} \cos \psi + \varepsilon \left(\frac{q+1}{2q+1} \right) 2 + \frac{2\varepsilon}{3} (q+1) \cos 2\psi - \\ - \frac{4\varepsilon}{3} \frac{q+1}{\sqrt{q}(2q+1)} \sin 2\psi.$$

Образует отношение ω , которое учитывает квадратичную нелинейность ко всем нелинейным членам уравнения для амплитуды (5):

$$\omega = \frac{2}{2q+1}. \quad (7)$$

Эта функция определяет вклад квадратичной нелинейности в амплитуду первой гармоники автоколебаний. Для малых q ($q < 0,5$) основную роль играет квадратичная нелинейность. Для больших q ($q > 0,5$) в основном амплитуду определяет кубичная нелинейность, и система (1) близка к генератору Ван-дер-Поля. Формулы (6) были проверены непосредственным интегрированием системы (1) на ЭВМ. На рис. 2 представлены результаты интегрирования и расчета по формулам (6). Сплошная линия построена по этим формулам. Крестиками отмечены выведенные через одну десятую периода результаты машинного счета. Для амплитуд колебаний, составляющих примерно половину от стационарного значения (точки 1,1) совпадение удовлетворительное. Рис. 2, а соответствует случаю, когда квадратичная нелинейность доминирует, а рис. 2, б, когда ω мало.

Таким образом, типичная автоколебательная биохимическая система в квазигармоническом режиме близка к соответствующему режиму генератора Ван-дер-Поля в широком диапазоне параметров. В случае, когда ω велико, особенности биохимических автоколебаний таковы, что их необходимо исследовать специально, например при изучении взаимной синхронизации таких систем.

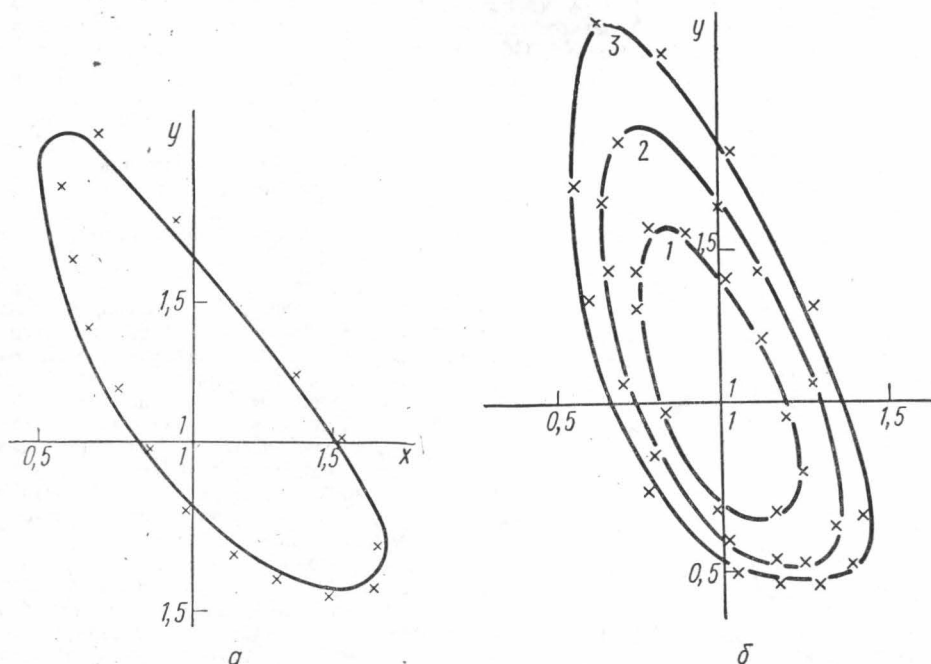


Рис. 2. Предельный цикл системы (1) с параметрами: а — $q=0,05$, $p=1,65$, $\omega=1$;
 б — $q=3$, $\omega=0,4$, $p_1=3,1$, $p_2=3,2$, $p_3=3,3$

ЛИТЕРАТУРА

1. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Что такое математическая биофизика. М., 1971.
2. Колебательные процессы в химических и биологических системах, т. 2. Пушино-на-Оке, 1971.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., 1959.
4. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., 1969.

Поступила в редакцию
 19.6 1973 г.

Кафедра общей физики
 для мехмата

А. Ф. БАША, В. И. ЧЕЧЕРНИКОВ

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕРМЕТАЛЛИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ МЕДИ С ЛАНТАНОИДАМИ

1. Магнитные свойства интерметаллических соединений редкоземельных металлов с элементами первой группы периодической системы изучены очень мало [1, 2, 3]. Это связано прежде всего с трудностями их получения. Между тем большинство редкоземельных металлов образуют с элементами этой группы, и в частности с медью, ряд интерметаллических соединений разного стехиометрического состава. Такое изменение стехиометрии при изменении кристаллической структуры должно оказывать влияние прежде всего на магнитные свойства этих соединений. Кроме того, меняя стехиометрию соединений, можно изменять число свободных электронов, что открывает возможности для выяснения роли этих электронов в механизме обменного взаимодействия. В связи с этим представляет интерес исследовать магнитные свойства, электросопротивление и ядерный магнитный резонанс в этих соединениях.