Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1974

УДК 539.12.01

Н. Ф. НЕЛИПА, И. Б. ЧЕРВЯКОВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ ЛИ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА (невырожденная серия)

Получены нелинейные представления алгебры Ли группы Лоренца (невырожденная серия), построены инварианты найденного представления и показано, что размерность максимального неприводимого представления равна 6.

1. В последнее время значительно возрос интерес к нелинейной теории поля, что, в свою очередь, стимулировало развитие нелинейных представлений групп.

Впервые одна из возможных реализаций нелинейных представлений алгебры Ли группы $SU(2)$ была найдена Швингером [1]. В работах [2] изложен общий подход к построению некоторого класса нелинейных представлений групп. Опираясь на работы С. Ли и Энгеля, а также Картана [3], Стоянов и Христов развили метод нахождения более общих нелинейных представлений [4] и построили нелинейные представления группы $SU(2)$ [5].

Нелинейные представления групп обладают специфическими особенностями, которые существенны при построении нелинейных лагранжианов [6]. Поэтому очень важно иметь сведения о нелинейных представлениях групп, подобно тому, как важно знать свойства линейных представлений групп при построении линейных лагранжианов. Тем самым знание нелинейных представлений групп представляет большой интерес для физических приложений.

В настоящей работе, следуя методу Стоянова и Христова, получена невырожденная серия нелинейных представлений алгебры Ли группы Лоренца, а также исследована приводимость найденного представления.

Приведем некоторые основные определения теории нелинейных представлений.

Нелинейным представлением группы Ли (алгебры Ли) называется взаимно-однозначное и гладкое отображение n-мерного многообразия $\mathfrak{M}^n$ на себя. Оператор представления группы $F_i(g_\mu, x_k)$ (соответственно

$$M_i^\mu(x) \equiv \left(\frac{\partial F_i(g, x)}{\partial g_\mu}\right)_{g=0}$$

для алгебры Ли), таким образом является векторной функцией точки многообразия и параметров группы.

Операция коммутирования определяется, как и для векторных полей, формулой

$$[M^{\mu}(x), M^{\nu}(x)]_i = \frac{\partial M_i^{\mu}}{\partial x_k} M_k^{\nu} - \frac{\partial M_i^{\nu}}{\partial x_k} M_k^{\mu} \quad (\text{сумма по } k).$$

Инвариантом представления называется скалярная функция $I(x)$ на $\mathfrak{M}^n$, которая не меняется при переходе к преобразованной точке:

$$I[F(g, x)] = I(x)$$

или для алгебры Ли:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial I(x)}{\partial x_k} M_k^{\mu}(x) = 0.$$

Представление неприводимо, если оно не имеет нетривиальных инвариантов.

Два представления называются эквивалентными, если они действуют на областях пространства $\mathfrak{M}^n$, связанных между собой невырожденным преобразованием координат

$$y_i = y_i(x_k), \quad \det\left\{\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right\} \neq 0.$$

Для алгебры Ли:

$$\sum_k \frac{\partial y_i}{\partial x_k} M_k^{\mu}(x) = N_i^{\mu}(y).$$

Обладая большей общностью по сравнению с линейными, нелинейные представления имеют менее разнообразные свойства. Так, размерность неприводимого нелинейного представления удовлетворяет неравенству: ранг группы $\leqslant n \leqslant$ число параметров группы.

В работе [5] классифицированы все возможные (в том числе приводимые) представления группы $SU(2)$.

Переход к линейным представлениям осуществляется по формулам:

$$M_i^{\mu}(x) = \sum_{k=1}^{n} T_{ik}^{\mu} x_k \text{ в координатной реализации,}$$

$$M_i^{\mu}(x) \to \sum_{k=1}^{n} M_k^{\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \text{ в функциональной реализации.}$$

При этом, если нелинейное представление неприводимо, то линейное может оказаться приводимым.

2. Алгебра Ли группы Лоренца имеет вид:

$$[H^+, H^3] = -H^+; \; [H^-, H^3] = H^-; \; [H^+, H^-] = 2H^3;$$

$$[F^+, H^+] = [H^-, F^-] = [H^3, F^3] = 0; \; [H^+, F^3] = -F^+; \; [H^-, F^3] = F^-;$$

$$[H^+, F^-] = -[H^-, F^+] = 2F^3; \; [F^+, H^3] = -F^+; \; [F^-, H^3] = F^-; \quad (1)$$

$$[F^+, F^3] = H^+; \ [F^-, F^3] = -H^-; \ [F^+, F^-] = -2H^3;$$

$$H^+ = iA_{23} - A_{13} \quad F^+ = iB_1 - B_2$$

$$H^- = iA_{23} - A_{13} \quad F^- = iB_1 + B_2 \quad [A, B]_i = \sum_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} B_j - A_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} \right)$$

$$H^3 = iA_{12} \quad F^3 = iB_3,$$

где $A_{\mu\nu}$ — генераторы пространственных вращений, B_μ — генераторы преобразований, содержащих также и нулевую координату.

Для нахождения генераторных функций нелинейного представления алгебры Ли группы Лоренца надо решить систему коммутационных соотношений (1) методом, развитым в [5].

Выписанная система коммутационных соотношений представляет собой систему квазилинейных уравнений в частных производных. Решение этой системы дает искомые генераторные функции. Идея нахождения решения сводится к следующему. Выбираем такую систему координат, в которой один из генераторов имеет диагональный вид. Подставляя известный генератор в исходную систему, получаем систему с меньшим числом уравнений, определяющую оставшиеся генераторные функции. Решаем полученную систему. Далее выбираем вид еще одного генератора и повторяем указанную процедуру. Преобразование координат, приводящее к виду второго генератора, должно сохранять вид первого генератора. Для этого преобразование должно быть невырожденным, и возможность его существования определяется существованием решения дифференциального уравнения в частных производных.

На основе теоремы 3 в [4] выбираем систему координат таким образом, чтобы генераторная функция H_i^3 имела диагональный вид, т. е.

$$H_i^3 = x_i,$$

Выбор конкретного вида генераторной функции H_i^3 приводит к конкретизации вида оставшихся генераторов. Подставляя (2) в коммутаторы, содержащие генератор H_i^3, получаем уравнения для оставшихся пяти генераторов:

$$\sum_j \frac{\partial H_i^+}{\partial x_j} x_j = 0, \ \sum_j \frac{\partial H_i^-}{\partial x_j} x_j = 2H_i^-, \ \sum_j \frac{\partial F_i^3}{\partial x_j} = F_i^3,$$

$$\sum_j \frac{\partial F_i^+}{\partial x_j} x_j = 0, \ \sum_j \frac{\partial F_i^-}{\partial x_j} = 2F_i^-.$$

Решение этих уравнений выглядит следующим образом:

$$H_i^- = x_n^2 \widetilde{H}_i^- (z_p), \ H_i^+ = \widetilde{H}_i^+ (z_p), \ F_i^3 = x_n \widetilde{F}_i^3 (z_p),$$

$$F_i^+ = \widetilde{F}_i^+ (z_p), \ F_i^- = \widetilde{F}_i^- (z_p) x_n^2,$$

где $\widetilde{H}_i^-, \widetilde{H}_i^+, \widetilde{F}_i^-, \widetilde{F}_i^+, \widetilde{F}_i^3$ — произвольные функции аргумента,

$$z_p = \frac{x_p}{x_n}; \quad p = 1, 2, \ldots n-1.$$

Существует бесконечное множество систем координат, в которых генераторная функция H_i^3 имеет диагональный вид. Среди них можно выделить такую систему, в которой другая генераторная функция H_i^+ запишется в форме $H_i^+ = 1$.

Этого можно достичь с помощью невырожденного преобразования координат

$$y_i = y_i(x_k), \quad \det\left\{\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right\} \neq 0,$$

сохраняющего вид генераторной функции H_i^3. Поэтому новые координаты y_i должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\sum_k \frac{\partial y_i}{\partial x_k} x_k = y_i, \quad \sum_k \frac{\partial y_i}{\partial x_k} H_k^+ = 1.$$

Подставляя решение первого уравнения

$$y_i = x_n \widetilde{y}_i(z_p)$$

во второе, получаем

$$\sum_p (H_p^+ - H_n^+ z_p) \frac{\partial \widetilde{y}_i}{\partial z_p} + \widetilde{y}_i H_n^+ = 1.$$

Если $H_p^+ - H_n^+ z_p \neq 0$ хотя бы для одного p, то эта система имеет бесконечное множество решений, среди которых всегда можно выбрать такое, что

$$\det\left\{\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right\} \neq 0.$$

Если же $H_p^+ - H_n^+ z_p = 0$ для всех p, то имеет место сильное вырождение. Интересуясь невырожденными представлениями, мы этот случай рассматривать не будем.

Итак, в новой системе координат

$$H_i^3 = y_i, \quad H_i^+ = 1.$$

Из коммутаторов, содержащих генераторы H_i^+, с учетом конкретного вида последних получим уравнение для определения оставшихся четырех генераторов

$$\sum_j \frac{\partial H_i^-}{\partial y_j} = -2y_i, \quad \sum_j \frac{\partial F_i^+}{\partial y_j} = 0,$$

$$\sum_j \frac{\partial F_i^3}{\partial y_j} = -F_i^+, \quad \sum_j \frac{\partial F_i^-}{\partial y_j} = -2F_i^3.$$

Решение этих уравнений запишется так:

$$H_i^- = -\frac{y_n^2}{2}\left(\frac{y_i}{y_n} + \frac{1}{(1-z_{n-1})^2}\widetilde{\widetilde{H}}_i^-(w_\alpha)\right), \quad F_i^+ = \widetilde{\widetilde{F}}_i^+(w_\alpha),$$

$$F_i^3 = (1 - z_{n-1})^{-1} \tilde{\tilde{F}}_i^3 (w_\alpha) + \Phi_i', \quad F_i^- = y_n^2 \frac{1}{(1 - z_{n-1})^2} \tilde{\tilde{F}}_i^- (w_\alpha) - 2F_i^3,$$

где Φ_i' — частное решение неоднородного уравнения

$$\sum_j \frac{\partial \Phi_i'}{\partial x_j} = - F_i^+,$$

а $\tilde{\tilde{H}}_i^-$, $\tilde{\tilde{F}}_i^+$, $\tilde{\tilde{F}}_i^3$, $\tilde{\tilde{F}}_i^-$ — произвольные функции аргумента,

$$w_\alpha = \frac{1 - z_\alpha}{1 - z_{n-1}}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots n - 2.$$

Сделаем очередной переход к системе координат, в которой генераторная функция F_i^3 имеет вид

$$F_i^3 = u_n (1 - z_{n-1})^{-1} \frac{2}{w_i + 1}.$$

Это преобразование должно сохранять форму генераторных функций (переход от одной канонической системы координат к другой) и, следовательно координаты u_i должны удовлетворять уравнениям

$$\sum_k \frac{\partial u_i}{\partial y_k} y_k = u_i, \quad \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial y_k} = 1, \quad \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial y_k} F_k^3 (y_i) = F_i^3 (u_k).$$

Выпишем решение первых двух уравнений

$$u_i = y_n - (y_n - y_{n-1}) \tilde{\tilde{u}}_i (w_\alpha).$$

Подстановка этого решения в третье уравнение дает

$$\sum_\alpha (F_\alpha^3 - w_\alpha F_{n-1}^3 - (1 - w_\alpha) F_n^3) \frac{\partial \tilde{\tilde{u}}_i}{\partial w_\alpha} + (F_{n-1}^3 - F_n^3) \tilde{\tilde{u}}_i =$$

$$= \frac{2 [y_n - (y_n - y_{n-1}) \tilde{\tilde{u}}_i}{(y_n - y_{n-1}) \tilde{\tilde{u}}_i - 2\tilde{\tilde{u}}_n + \tilde{\tilde{u}}_{n-1})} - F_n^3 (y_i).$$

Если $F_\alpha^3 - w_\alpha F_{n-1}^3 - (1 - w_\alpha) F_n^3 \neq 0$ хотя бы для одного α, то в силу непрерывности и дифференцируемости этого выражения по w_α полученная система имеет бесконечное число решений, среди которых всегда можно выбрать решение, реализующее данные преобразования. Если же это выражение равно нулю для всех α, то имеет место двукратное вырождение.

Сохраняя старые обозначения координат, выпишем полученные выражения для трех генераторов:

$$H_i^+ = 1, \; H_i^3 = x_i, \; F_i^3 = x_n (1 - z_{n-1})^{-1} \frac{2}{w_i + 1}.$$

Продолжая этот процесс аналогичным образом, найдем три оставшиеся генераторные функции. На каждом этапе вычислений генераторы будут содержать произвольные функции от соответствующих переменных:

$$v_a = \frac{w_{n-2}}{(w_{n-2}-1)^2}\frac{(w_a-1)^2}{w_a}, \quad a = 1, 2, \ldots n-3,$$

$$q_\xi = \left(\frac{R^2 v_\xi + R^1_\xi}{v_\xi}\right)^{R^1_{n-3}/R^1_\xi} \left(\frac{v_{n-3}}{R^2_{n-3}v_{n-3} + R^1_{n-3}}\right),$$

$$p_\xi = \left(\frac{R^4_\xi v_\xi + R^2_\xi}{v_\xi}\right)^{R^3_{n-3}/R^3_\xi} \left(\frac{v_{n-3}}{R^4_{n-3}v_{n-3} + R^3_{n-3}}\right),$$

$$y_\gamma = \frac{(p_\gamma)^{R^5_{n-4}/R^5_\gamma}}{p_{n-4}}, \quad \xi = 1, 2, \ldots n-4; \quad \gamma = 1, 2, \ldots n-5,$$

где R и p — некоторые функции x_i, явный вид которых приведен в приложении I. Конкретизация генераторов производится путем выбора определенного вида произвольных функций указанных аргументов; это достигается невырожденным преобразованием координат.

В результате находим для генераторов H_i^-, F_i^-, F_i^+

$$H_a^- = K_a v_a + N_a; \; H_{n-2}^- = K_{n-2} + N_{n-2};$$

$$H_n^- = -\frac{x_n^2}{2}\left[\frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{1}{(1-z_{n-1})^2}\left(-\frac{c''B_n' - c'}{A_{n-1}' + B_n' A_{n-1}''}\right)\right] +$$

$$+ \frac{x_n^2}{(1-z_{n-1})^2}\left(\frac{k_n''(k'k_{n-1}'' - k''k_{n-1}')}{k_{n-1}''(k_n'k_{n-1}'' - k_n''k_{n-1}')} - \frac{k''}{k_{n-1}''}\right) - 2F_{n-3}^3;$$

$$H_n^- = -\frac{x_n^2}{2}\left[1 + \frac{1}{(1-z_{n-1})^2}\left(A_{n-1}'' \frac{c''B_n'' - c'}{A_{n-1}' + B_n' A_{n-1}''} - c''\right)\right] +$$

$$+ \frac{x_n^2}{(1-z_{n-1})^2}\frac{k''k_{n-1}'' - k''k_{n-1}'}{k_n''k_{n-1}'' - k_n''k_{n-1}'} - 2F_n^3;$$

$$F_\xi^+ = \Phi_\xi^+ q_\xi + \Psi_\xi^+; \; F_{n-3}^+ = \Phi_{n-3}^+ + \Psi_{n-3}^+;$$

$$F_n^+ = \left\{\frac{(x_n - 2x_{n-1})[1-(x_n - x_{n-1})]}{x_n}\right\}^{-1}\left\{\frac{(x_n - x_{n-1})^3}{2} - \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{x_n^2}\right\};$$

$$F_{n-1}^+ = -\left[\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2} + F_n^+ \frac{(x_n - 2x_{n-1})}{x_n}\right];$$

$$F_{n-2}^+ = P_{n-2}'' \frac{J_2^1}{J_1^1} + Q_{n-2}''; \; F_\gamma^- = \Phi_\gamma^- (p_{n-4})^{G_\gamma^2/R_{n-4}^5} y_\gamma + \Phi_\gamma^- \frac{J_\gamma^2}{R_\gamma^5} + \Psi_\gamma^-;$$

$$F_{n-3}^- = -\Phi_{n-3}^- \frac{J_{n-3}^3}{G_{n-3}^3} + \Psi_{n-3}^-; \; F_{n-2}^- = P_{n-2}' \frac{J_2^2}{J_1^2} + Q_{n-2}';$$

$$F_{n-1}^- = \frac{x_n^2}{(1-z_{n-1})^2}\left(-\frac{M_n'' M_{n-1}'}{M_{n-1}'' M_n'}\right) - 2F_{n-1}^3 -$$

$$- \frac{x_n^2}{2}\left\{\frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{1}{(1-z_{n-1})^2}\left(\frac{\tilde{c}''B_n'' - \tilde{c}'}{\tilde{A}_{n-1}' + \tilde{B}_n'' A_{n-1}''}\right)\right\};$$

$$F_n^- = \frac{x_n}{(1-z_{n-1})^2}\left(-\frac{M_n''}{M_{n-1}''}\right) - 2F_n^3 -$$

$$-\frac{x_n}{2}\left\{1+\frac{1}{(1-z_{n-1})^2}\left(A_{n-1}''\frac{\widetilde{c}''B_n'-\widetilde{c}'}{\widetilde{A}_{n-1}'+B_n'A_{n-1}''}\right)\right\},$$

где K, N, Φ, Ψ, J, G и т. д. функции x_i выписаны в приложении I.

3. По определению, инвариантная функция представления удовлетворяет уравнениям

$$\sum_k \frac{\partial J}{\partial x_k} H_k^+(x_i) = 0; \quad \sum_k \frac{\partial J}{\partial x_k} F_k^+(x_i) = 0; \quad \sum_k \frac{\partial J}{\partial x_k} H_k^3(x_i) = 0;$$

$$\sum_k \frac{\partial J}{\partial x_k} H_k^-(x_i) = 0; \quad \sum_k \frac{\partial J}{\partial x_k} F_k^-(x_i) = 0; \quad \sum_k \frac{\partial J}{\partial x_k} F_k^3(x_i) = 0.$$

Решая последовательно выписанные уравнения, находим инвариантные функции. При этом на каждом этапе инвариантная функция $I(x_k)$ определяется как произвольная функция переменных

$$z_p \to w_\alpha \to v_a \to t_\xi \to \theta_\gamma \to y_\eta; \; p = 1, 2 \ldots n-1;$$

$$\alpha = 1, 2 \ldots n-2; \; a = 1, 2, \ldots n-3;$$

$$z_p = \frac{x_p}{x_n}; \; w_\alpha = \frac{1-z_\alpha}{1-z_{n-1}}; \; v_a = \frac{w_{n-2}}{(w_{n-2}-1)^2}\cdot\frac{(w_a-1)^2}{w_a};$$

$$t_\xi = \frac{L_\xi(v_\xi+M_\xi)}{v_\xi}\left(\frac{v_{n-3}}{L_{n-3}v_{n-3}+M_{n-3}}\right)^{M_\xi/M_{n-3}}; \; \xi = 1, 2, \ldots n-4;$$

$$\theta_\gamma = t_\gamma(t_{n-4})^{-\frac{D_\gamma}{D_{n-4}}}; \quad y_\eta = \theta_\eta(\theta_{n-5})^{-T_\eta/T_{n-5}};$$

$$\gamma = 1, 2, \ldots n-5; \quad \eta = 1, 2, \ldots n-6.$$

В итоге инвариантом представления будет произвольная функция аргумента y_η. В частности

$$J(y_\eta) = y_\eta.$$

Введем новые переменные с помощью формул

$$\zeta_{n-5} = x_{n-5}, \quad \zeta_{n-2} = x_{n-2},$$

$$\zeta_{n-4} = x_{n-4}, \quad \zeta_{n-1} = x_{n-1}, \qquad \zeta_\eta = y_\eta.$$

$$\zeta_{n-3} = x_{n-3}, \quad \zeta_n = x_n.$$

В таком базисе генераторные функции найденного представления запишутся так:

$$H_\eta^+ = H_\eta^- = H_\eta^3 = F_\nu^+ = F_\eta^- = F_\eta^3 = 0; \; H_\mu^+ = H_\mu^+(y_\nu);$$

$$H_\mu^- = H_\mu^-(y_\nu); \; H_\mu^3 = H_\mu^3(y_\nu);$$

$$F_\mu^+ = F_\mu^+(y_\nu); \; F_\mu^- = F_\mu^-(y_\nu); \; F_\mu^3 = F_\mu^3(y_\nu);$$

$$\mu, \nu = n-6, \; n-5, \; n-4, \ldots n.$$

Как видно, любое невырожденное нелинейное представление алгебры Ли группы Лоренца имеет $n-6$ тривиальных инвариантов; поэтому оно приводимо и распадается на $n-6$ скалярных (т. е. одномерных) представлений и шестимерное неприводимое представление.

Приложения

I. $K_\alpha = x_n^2\beta^2 w_\alpha^{b+4}(w_\alpha - 1)^{-2(b+2)} e^{-2\lambda_\alpha(w_\alpha)}$;

$$N_\alpha = -\frac{x_n x_\alpha}{2} + \gamma_\alpha w_\alpha \left(\frac{c'}{w_\alpha} - \frac{d'}{w_\alpha + 1} - g'_\alpha\right) +$$

$$+ x_n\beta^2 \left\{-\frac{\gamma_\alpha}{w_\alpha} - \left(a'' + \frac{b''}{w_\alpha}\right)\right\}^{-1} \left[\frac{c''_\alpha}{w_\alpha^2}\left(x_n^2\beta^2 \frac{k'k''_{n-1} - k''k'_{n-1}}{k''_n k''_{n-1} - k''_n k'_{n-1}} - k''\right) - 2F_\alpha^3\right];$$

$$P''_\alpha = \left(\frac{w_\alpha}{w_\alpha - 1}\right) e^{-\lambda_\alpha(w_\alpha)};$$

$$Q''_\alpha = -\gamma_\alpha w_\alpha \left[F_n^+ \frac{x_n - 2x_\alpha}{x_n w_\alpha^2} + x_n\beta\right];$$

$$P'_\alpha = x_n^2\beta^2 (w_\alpha - 1)^{2(\bar{b}+\bar{c})} (w_\alpha)^{-(2\bar{b}+\bar{c})} e^{\lambda''_\alpha(w_\alpha)};$$

$$R_a^2 = -\frac{2K_a P''_a \beta}{x_n (w_a - 1)};$$

$$Q'_\alpha = 2\beta^2\gamma_\alpha \frac{1}{w_\alpha}\left[x_n^2\beta^2\left(-\frac{M''_n M'_{n-1}}{M''_{n-1} M'_n}\right) - 4x_n\beta\right] -$$

$$-\frac{x_n^2}{2}\left\{\frac{x_\alpha}{x_n} + \beta^2\left[-\frac{1}{\gamma_\alpha} - w_\alpha\left(\frac{2}{w_\alpha^2} + b\right)\right]^{-1}\left(\frac{c'}{w_\alpha^2} - \frac{d'}{w_\alpha + 1} + g_\alpha\right) w_\alpha\right\};$$

$$R_a^1 = P''_a \left\{\sum_\varepsilon P^\varepsilon H_\varepsilon^- - \frac{2N_a\beta}{x_n (w_a - 1)}\right\};$$

$$J_a - \frac{\partial}{\partial x_a}(P''_a N_a) + \sum_\varepsilon \frac{\partial P''_a}{\partial x_\varepsilon} H_\varepsilon^-;$$

$$G_a = -\left\{\frac{\partial}{\partial x_a}(P''_a K_a) + P''_a K_a \frac{2\beta x_n}{w_a - 1}\right\};$$

$$\Gamma_a^1 = \frac{\partial}{\partial x_a}(Q''_a K_a) + K_a Q''_a \frac{2\beta}{x_n (w_a - 1)} - F_{n-2}^+ \frac{\partial K_a}{\partial x_{n-2}} - F_{n-2}^+ K_a P^{n-2} -$$

$$- F_{n-1}^+ \frac{\partial K_a}{\partial x_{n-1}} - F_{n-1}^+ P_a^{n-1} K_a - F_n^+ \frac{\partial K_a}{\partial x_n} - P''_a K_a F_n^+;$$

$$\Gamma_a^2 = \frac{\partial}{\partial x_a}(Q''_a N_a) + \frac{\partial Q''_a}{\partial x_{n-2}} H_{n-2}^- + F_{n-2}^+ \frac{\partial N_a}{\partial x_{n-2}} + \frac{\partial Q''_a}{\partial x_{n-1}} H_{n-1}^- -$$

$$- F_{n-1}^+ \frac{\partial N_a}{\partial x_{n-1}} - F_n^+ \frac{\partial N_a}{\partial x_{n-1}} - F_n^+ \frac{\partial N_a}{\partial x_n} - 2F_{n-2}^3;$$

$$J_1^1 = \frac{\partial P''_{n-2}}{\partial x_{n-2}}(K_{n-2} + N_{n-2}) - P''_{n-2}\frac{\partial H^-_{n-2}}{\partial x_{n-2}} + H^-_{n-1}\frac{\partial P''_{n-2}}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial P''_{n-2}}{\partial x_n} H^-_n;$$

$$J_2^1 = -\left\{\frac{\partial}{\partial x_{n-2}}(Q''_{n-2}H^-_{n-2}) - F^-_{n-1}\frac{\partial H^-_{n-2}}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial Q''_{n-2}}{\partial x_n} - F^+_n\frac{\partial H^-_{n-2}}{\partial x_n} - 2F^3_{n-2}\right\};$$

$$\varepsilon = n-2,\ n-1,\ n.$$

$$\Phi^+_a = (R^2_a v_a + R^1_a)^{G_a/R^2_a}\left(\frac{R^2_a v_a + R^1_a}{v_a}\right)^{-J_a/R^1_a} P''_a;$$

$$\Psi^+_a = \frac{\Gamma^1_a v_a + \Gamma^2_a}{R^2_a v_a + R^1_a} P''_a + Q''_a; \quad Б_a = \frac{R^4_a v_a + R^3_a}{v_a};$$

$$\Phi^-_a = (Б_a)^{R^3_{n-3}/R^3_a}(Б_{n-3})^{-1} P'_a; \quad \Psi^-_a = \frac{\Gamma^3_a v_a + \Gamma''_a}{R^4_a v_a + R^3_a} P'_a + Q'_a;$$

$$R^3_a = P'_a\left[\left(\sum_\varepsilon P^\varepsilon H^-_\varepsilon\right) - \frac{2N_a\beta}{x_n(w_a - 1)}\right]; \quad R^4_a = -\frac{2K_a P'_a\beta}{(w_a - 1)x_n};$$

$$G^1_a = -\left\{\frac{\partial}{\partial x_a}(K_a P'_a) + \frac{\partial K_a}{\partial x_a} K_a \frac{2\beta}{x_n(w_a - 1)}\right\};$$

$$\overline{J}_a = -\frac{\partial}{\partial x_a}(N_a P'_a) + \sum_\varepsilon \frac{\partial P'_a}{\partial x_\varepsilon} H^-_\varepsilon;$$

$$G^2_\xi = -\left\{\sum_\rho \frac{\partial \Phi^-_\xi}{\partial x_\rho} Б'_\rho - \Phi^-_\xi\left(\frac{\partial F^+_\xi}{\partial x_\xi}\right)' + \sum_\delta F^+_\delta \frac{\partial \Phi^-_\xi}{\partial x_\delta}\right\};$$

$$\Gamma^1_a \xrightarrow[P''_a \to P'_a]{Q''_a \to Q'_a} \Gamma^3_a; \quad \Gamma^2_a \xrightarrow[P''_a \to P'_a]{Q''_a \to Q'_a} \Gamma^4_a; \quad J^1_1 \xrightarrow{P''_{n-2} \to P'_{n-1}} J^2_1; \quad J^1_2 \xrightarrow{Q''_{n-2} \to Q'_{n-2}} J^2_2;$$

$$R^5_\rho = \Phi^-_\rho\left[A''_\rho Б'_\rho + \sum_\delta A^\delta_\rho F^+_\delta\right]; \quad Б'_\rho = \Phi^+_\rho q_\rho + \Psi^+_\rho;$$

$$J^2_\xi = -\left\{\left(\sum_\rho \frac{\partial \Psi^-_\xi}{\partial x_\rho} Б'_\rho\right) - \Psi^-_\xi\left(\frac{\partial F^+_\xi}{\partial x_\xi}\right)' + \frac{\partial \Psi^-_\xi}{\partial x_{n-3}} - (\Phi^-_{n-3}\overline{F}^-_{n-3} + \Psi^-_{n-3})\frac{\partial F^+_\xi}{\partial x_{n-3}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \Psi^-_\xi}{\partial x_{n-3}} F^+_{n-2} + F^-_{n-2}\frac{\partial F^+_\xi}{\partial x_{n-2}} + \frac{\partial \Psi^-_\xi}{\partial x_{n-1}} F^+_{n-1} - F^-_{n-1}\frac{\partial F^+_\xi}{\partial x_{n-1}} - F^-_n\frac{\partial F^+_\xi}{\partial x_n} - 2H^3_\xi\right\};$$

$$A^\delta_\rho = \frac{\partial}{\partial x_\delta}\left[\frac{R^3_{n-3}}{R^3_\rho}\ln Б_\rho\right] + Б_{n-3}\frac{\partial}{\partial x_\delta}\left(\frac{1}{Б_{n-3}}\right);$$

$$R^5_\rho \xrightarrow{\Phi^-_\rho \to \Phi^-_{n-3}} R^6_\rho; \quad G^2_\xi \xrightarrow{\Phi^-_\xi \to \Phi^-_{n-3}} G^3_\xi; \quad J^2_\xi \xrightarrow{\Psi^-_\xi \to \Psi^-_{n-3}} J^3_\xi;$$

$$\beta = \frac{x_n}{x_n - x_{n-1}}; \quad \beta' = x_n^2 - 3x_n x_{n-1} - 2x^2_{n-1}; \quad \gamma_a = \frac{(w_a + 1)}{w_a(w_a - 1)};$$

$$\delta = n-3,\ n-2,\ n-1,\ n.$$

$$c' = 2x_n^3\beta^{-3};\ b' = -\left(2 + \frac{4x_n^4}{\beta}\beta'\right);\ d' = \beta^{-3};$$

$$g_\alpha = \frac{x_n - 2x_{n-1}}{\beta}\left(1 - \frac{4}{x_n\beta}\right) - \frac{2x_\alpha}{\beta^3 x_n};$$

$$B' = \frac{2\beta'\beta^4}{x_n};\ a'' = -2x_n\beta;\ b'' = -\frac{1}{x_n\beta}(1 - 2\beta' x_n^4);\ d'' = -\frac{4}{x_n^2};\ A' = x_n\beta^3;$$

$$c'' = \frac{1}{x_n\beta^4}(z_{n+1}\beta - 4x_n);\ \lambda_\alpha = -\frac{3}{2}\left(\frac{w_\alpha - 1}{w_\alpha}\right) + \frac{1}{w_\alpha};$$

$$k' = 2x_n\beta;\ k'' = 2k';$$

$$k'_{n-1} = x_n\beta^4\left(1 + \frac{2\beta'\beta^2}{x_n}\right);\ k'_n = x_n^2\beta^2(2 - \beta);\ k''_{n-1} = x_n^2(\beta^4 - 2);$$

$$k''_n = x_n^2\beta^2\left[\beta\left(2 - \frac{1}{x_n}\right) - 3\right];$$

$$A''_{n-1} = \frac{2}{x_n\beta};\ B''_n = \frac{2}{\beta^2}\left(2 - \beta - \frac{2\beta'\beta^3}{x_n^5}\right);\ c'' = \frac{1}{x_n\beta^4}(z_{n-1}\beta - 4x_n);$$

$$A'_{n-1} = \frac{1}{x_n\beta}(\beta'\beta^3 - 1);\ B'_n = \frac{1}{x_n\beta^2}[x_n(2 - \beta) - 4\beta'\beta^3];\ \bar{a} = -\frac{2}{x_n^2};$$

$$\bar{c}_\alpha = \frac{2(x_n - 2x_\alpha)}{x_n^3};\ \bar{b} = \frac{2}{x_n^2}(x_n^2 + 2\beta'\beta);\ M'_n = x_n\beta^2(2 - \beta);$$

$$M'_{n-1} = 4\beta'\beta^5 + x_n^2\beta^2(\beta^2 - 2);\ M''_{n-1} = x_n\beta^3(x_n\beta - 2);$$

$$M''_n = 2x_n^2\beta^2[\beta(\beta - 1) - 2];$$

$$b = b' - \frac{1}{x_n^4\beta^2};\ g_\alpha = g'_\alpha + \frac{x_\alpha}{x_n\beta^4};\ \widetilde{A}_{n-1} = A'_{n-1} - \frac{2}{\beta^2};\ \widetilde{c} = c' - \frac{x_{n-1}}{x_n\beta^4};$$

$$\widetilde{B}'' = B''_n - \frac{1}{\beta^2};\ \widetilde{c}'' = c - \frac{1}{\beta^4};\ P^{n-2} = \frac{\gamma_{n-2}}{x_n}\beta;\ P''_a = \gamma_a\frac{\partial w_a}{\partial x_n} - \gamma_{n-2}\frac{\partial w_{n-2}}{\partial x_n};$$

$$P_a^{n-1} = \left[-\gamma_{n-2}\frac{\partial w_{n-2}}{\partial x_{n-1}} + \gamma_a\frac{\partial w_a}{\partial x_{n-1}}\right];$$

$$\text{II. } L_a = -\frac{2\beta}{x_n(w_a - 1)}K_a;\ M_a = \frac{2\beta}{x_n(v_a - 1)} + \sum_\varepsilon P^\varepsilon H_\varepsilon^-;$$

$$\Pi_\rho^\rho = \frac{v_\rho}{L_\rho v_\rho + M_\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\rho}\left(\frac{L_\rho v_\rho + M_\rho}{v_\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial x_\rho}\left[\frac{M_\rho}{M_{n-3}}\ln\left(\frac{v_{n-3}}{L_{n-3}v_{n-3} + M_{n-3}}\right)\right];$$

$$D_\rho = \Pi_\rho^\rho F_\rho^+ + \sum_\delta \Pi_\rho^\delta F_\delta^+;\ \Pi_\rho^\rho \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_\rho} \to \frac{\partial}{\partial x_\delta}} \Pi_\rho^\delta;$$

$$T_\gamma = X_\gamma^\gamma F_\gamma^+ + \sum_f X_\gamma^f F_f^-;\ X_\gamma^\gamma = \frac{1}{t_\gamma}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\gamma}t_\gamma + \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left[-\frac{D_\gamma}{D_{n-4}}\ln t_{n-4}\right]$$

$f = n - 4,\ n - 3,\ n$ [illegible] $,\ n - 1,\ n.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwinger J. Phys. Lett., **248**, 473, 1967.
2. Coleman S., Wess J., Zumino B. Phys. Rev., **177**, 2239, 1969.
3. Lie S., Euge F. Theorie der Trausformationgruppen 1, 2, 3. Leipzig; 1893; Cartan E. Sur la structur des groups de trausformations tinis et coutinus. Paris, 1913.
4. Стоянов Д. Ц., Христов Хр. Нелинейные представления группы Ли. ОИЯИ, Р2—3725, 1968.
5. Стоянов Д. Ц., Христов Хр. Нелинейные представления группы SU (2). ОИЯИ, Р2—3648, 1967.
6. Schwinger J. Ann. Phys., **2**, 407, 1957; Chaug P., Gürsey F. Phys. Rev., **164**, 1752, 1967; Coleman S., Ness J., Zumino B. Phye. Rev., **177**, 2239, 1969; Weinberg S. Phys. Rev. Lett., **18**, 188, 1967.

Поступила в редакцию
3.1 1973 г.

Кафедра
теоретической физики