

А. Б. КУКАНОВ

К ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ТОЧЕЧНОЙ ЧАСТИЦЕЙ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

Рассмотрена задача об излучении заряженной точечной частицей, движущейся в параллельных постоянных и однородных электрическом и магнитном полях. Найдено аналитическое выражение для полной энергии излучения с учетом поляризационных эффектов. Рассмотрен частный случай излучения при движении в постоянном и однородном электрическом поле.

В настоящей работе рассматривается задача об излучении заряженной частицей, движущейся в параллельных электрическом и магнитном полях E^{ext} и H^{ext} . Считаем, что поля постоянны, однородны и направлены вдоль оси z . Известно, что траектория рассматриваемой частицы представляет винтовую линию с монотонно возрастающим шагом. Параметрические уравнения движения частицы имеют вид [1]:

$$x_p = \frac{cp_0}{eH^{ext}} \sin \tilde{\varphi} = \frac{cp_0}{eH^{ext}} \sin \varepsilon t_0,$$

$$y_p = \frac{cp_0}{eH^{ext}} \cos \tilde{\varphi} = \frac{cp_0}{eH^{ext}} \cos \varepsilon t_0, \quad (1)$$

$$z_p = \frac{\mathcal{E}_0}{eE^{ext}} \left(\operatorname{ch} \frac{E^{ext}}{H^{ext}} \tilde{\varphi} - 1 \right) = \frac{\mathcal{E}_0}{eE^{ext}} (\operatorname{ch} t_0 - 1), \quad (2)$$

$$\frac{ceE^{ext}}{\mathcal{E}_0} t = at = \operatorname{sh} \frac{E^{ext}}{H^{ext}} \tilde{\varphi} = \operatorname{sh} t_0. \quad (3)$$

Здесь и в дальнейшем e — заряд частицы, p_0 — постоянное значение проекции импульса на плоскость xy , $\mathcal{E}_0$ — энергия частицы в момент времени $t=0$; c — скорость света в вакууме,

$$a = \frac{ceE^{ext}}{\mathcal{E}_0}, \quad b = \frac{p_0 c}{\mathcal{E}_0}, \quad \varepsilon = \frac{H^{ext}}{E^{ext}}.$$

Плотность электрического заряда и тока, обязанного частице, движущейся по закону (1)–(3), запишем в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = ev(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p(t)),$$

где $\mathbf{r}_p(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ — радиус-вектор и скорость заряженной частицы. Классическая теория синхротронного излучения, соответствующая случаю $E^{ext.} \rightarrow 0$ в формулах (1)–(3), изложена, например, в [2]. На основе излагаемого ниже метода соответствующая задача решена в [3, 4]. Поэтому в дальнейшем будем предполагать $E^{ext.} \neq 0$. Особенность задачи в этом случае состоит в том, что движение частицы оказывается не-

периодическим, а величина $W = - \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{E} \mathbf{j}) d\mathbf{r}$ оказывается функцией времени t . Поэтому для нахождения аналитического выражения для полной энергии излучения мы должны проинтегрировать $W(t)$ по времени t от $-\infty$ до $+\infty$:

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} W(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{E} \mathbf{j}) d\mathbf{r}. \quad (4)$$

Для определения поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, создаваемого движущимся зарядом, воспользуемся методом Фурье [5]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \iint \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} d\mathbf{k} d\omega$$

и т. д.

Тогда из уравнений Максвелла мы получим следующую систему алгебраических уравнений для определения Фурье-компонентов $E_l(\mathbf{k}, \omega)$:

$$[n^2(\kappa_l \kappa_l - \delta_{ll}) + \delta_{ll}] E_l(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi^3 i \omega} \int j_l(\mathbf{r}', t') e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}' + i\omega t'} d\mathbf{r}' dt'. \quad (5a)$$

Здесь

$$n^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \frac{\mathbf{k}}{k} = \{\sin \theta \cos \varphi; \sin \theta \sin \varphi; \cos \theta\}.$$

При исследовании поляризационных свойств полного излучения мы должны считать Фурье-образ $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ электрического поля разложенным вдоль векторов $\mathbf{a}_\lambda$ ($\lambda = g, f, h$):

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\lambda=g,f,h} E_\lambda(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{a}_\lambda, \quad (5b)$$

$$\mathbf{a}_g = \cos \alpha \mathbf{l}_\mu + e^{i\beta} \sin \alpha \mathbf{l}_\xi, \quad \mathbf{a}_f = \sin \alpha \mathbf{l}_\mu - e^{i\beta} \cos \alpha \mathbf{l}_\xi, \quad \mathbf{a}_h = \frac{\mathbf{k}}{k} = \boldsymbol{\kappa}, \quad (6)$$

$$\mathbf{l}_\mu = \left\{ -\frac{\kappa_2}{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^{1/2}}; \quad -\frac{\kappa_1}{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^{1/2}}; \quad 0 \right\} = \{-\sin \varphi; \cos \varphi; 0\}, \quad (7)$$

$$\mathbf{l}_\xi = \left\{ -\frac{\kappa_1 \kappa_3}{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^{1/2}}; \quad -\frac{\kappa_2 \kappa_3}{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^{1/2}}; \quad (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^{1/2} \right\} = \{-\cos \theta \cos \varphi; -\cos \theta \sin \varphi; \sin \theta\}. \quad (8)$$

α, β — вещественные параметры, $(\mathbf{a}_g \mathbf{a}_f) = \delta_{gf}$. Используя формулы (5)–(8) и вводя обозначение $\delta = b\epsilon^{-1} = b \frac{E^{ext}}{H^{ext}}$, выражение для полной энергии излучения частицей, движущейся по закону (1)–(3), запишем в виде

$$\begin{aligned}
G = \int_{-\infty}^{\infty} W dt = \sum_{\lambda=g, f} G_{\lambda} = \left(\frac{e}{2\pi a} \right)^2 \sum_{\lambda=g, f} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{\omega^2}{c} d\omega \times \\
\times \int_{-\infty}^{\infty} d\chi' \int_{-\infty}^{\infty} d\chi \langle A_{\lambda} b^2 \sin(\varepsilon\chi' + \psi) \sin(\varepsilon\chi + \psi) + B_{\lambda} \{ \cos \theta [b \cos(\varepsilon\chi' + \psi) - \\
- \operatorname{ch} \chi'] - \operatorname{sh} \chi' \} \{ \cos \theta [b \cos(\varepsilon\chi + \psi) - \operatorname{ch} \chi] - \operatorname{sh} \chi \} + \\
+ C_{\lambda} \{ e^{-i\beta} b \sin(\varepsilon\chi + \psi) \{ \cos \theta [b \cos(\varepsilon\chi' + \psi) - \operatorname{ch} \chi'] - \operatorname{sh} \chi' \} + \\
+ e^{i\beta} b \sin(\varepsilon\chi' + \psi) \{ \cos \theta [b \cos(\varepsilon\chi + \psi) - \operatorname{ch} \chi] - \operatorname{sh} \chi \} \} \rangle \times \\
\times \exp \{ i v [\operatorname{sh} \chi' - \operatorname{sh} \chi] - i u [\sin(\varepsilon\chi' + \psi) - \sin(\varepsilon\chi + \psi)] \}, \quad (9)
\end{aligned}$$

$$A_g = B_f = \cos^2 \alpha; \quad A_f = B_g = \sin^2 \alpha; \quad C_g = -C_f = \frac{\sin 2\alpha}{2}. \quad (10)$$

В (9) были введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\psi = \Phi - \varepsilon\eta, \quad \chi = t_0 + \eta, \quad \chi' = t'_0 + \eta, \\
\operatorname{ch} \eta = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \operatorname{sh} \eta = -\operatorname{ctg} \theta, \\
v = \frac{\omega \sin \theta}{a}, \quad u = v\delta = \frac{p_0 \omega \sin \theta}{e H^{ext}}.
\end{aligned}$$

Поляризационные эффекты при излучении в постоянном и однородном электрическом поле

Полагая в (9) внешнее магнитное поле H^{ext} равным нулю и интегрируя по χ и χ' , найдем формулу, позволяющую определить выражение для полной энергии излучения частицей в постоянном электрическом поле с учетом поляризационных эффектов. В частности, выбирая начальный импульс частицы вдоль оси x , что соответствует уравнениям движения

$$x_p = \frac{bc}{a} \operatorname{Arsh}(at), \quad y_p = 0, \quad z_p = \frac{c}{a} (\sqrt{a^2 t^2 + 1} - 1),$$

будем иметь

$$\begin{aligned}
(R_v(v) = 2K_{iv}(v) e^{\frac{v\pi}{2}}, \quad v = bv \cos \varphi); \quad (11) \\
G = \int_{-\infty}^{\infty} W(t) dt = \sum_{\lambda=g, f} G_{\lambda} = \frac{e^2}{(2\pi a)^2 c} \int_0^{\infty} \omega^2 d\omega \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \times \\
\times \sum_{\lambda=g, f} [A_{\lambda} b^2 \sin^2 \varphi R_v^2(v) + B_{\lambda} R_v'^2(v) + 2b \sin \varphi \sin \beta C_{\lambda} R_v(v) \cdot R_v'(v)]. \quad (12)
\end{aligned}$$

Мы получим результат [6], если в (12) просуммируем по индексам λ [7].

Полагая в формуле (12) $b=0$, находим выражение для полной энергии излучения при гиперболическом движении заряженной частицы вдоль оси z :

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} W dt = \frac{2e^2}{\pi c a^2} \sum_{\lambda=g, f} B_{\lambda} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \sin \theta \omega^2 K_1^2 \left(\frac{\omega \sin \theta}{a} \right) d\theta d\omega. \quad (13)$$

Излучение при гиперболическом движении полностью линейно поляризовано, причем Фурье-компонент $E(k, \omega)$ электрического поля излучения лежит в плоскости, содержащей волновой вектор k и вектор скорости заряженной частицы.

Ограничиваясь только случаем линейных поляризаций ($\beta=0$) и полагая в формуле (9) $H^{ext.}=0$, проинтегрируем ее сначала по ω , а затем по χ и χ' . Мы получим следующую формулу для углового распределения полной энергии излучения с учетом поляризационных эффектов:

$$aG = a \int_{-\infty}^{\infty} W dt = \frac{e^2 a^2}{32c} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \int_0^{2\pi} d\varphi \times \\ \times \sum_{\lambda=g, f} \left[A_{\lambda} \frac{b^2 \sin^2 \varphi (1 + 4b^2 \cos^2 \varphi)}{(1 - b^2 \cos^2 \varphi)^{7/2}} + B_{\lambda} \frac{[3 + 4b^2 \cos^2 \varphi]}{(1 - b^2 \cos^2 \varphi)^{5/2}} \right]. \quad (14)$$

Видим, что интегрирования по θ и φ в (14) полностью разделяются. Интегрируя по φ , найдем угловое распределение полной энергии излучения по углу θ :

$$a \int_{-\infty}^{\infty} W dt = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c} \gamma^2 \sum_{\lambda=g, f} \left\{ A_{\lambda} \left[\frac{E}{8} \left(\gamma^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{F}{16} \right] + \right. \\ \left. + B_{\lambda} \left[\frac{E}{8} (7\gamma^2 + 1) - \frac{7}{16} F \right] \right\} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}. \quad (15)$$

Здесь

$$F \left(\frac{\pi}{2}, b \right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \psi}}$$

и

$$E \left(\frac{\pi}{2}, b \right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - b^2 \sin^2 \psi} d\psi -$$

полные эллиптические интегралы соответственно 1-го и 2-го рода, $\gamma^2 = (1 - b^2)^{-1}$. Естественным является то, что полная энергия излучения рассматриваемого источника за бесконечное время представляет собой расходящийся результат. Суммируя в (14), (15) по индексу λ , найдем результаты [8].

Поляризационные эффекты при излучении в параллельных полях

При $H^{ext} \neq 0$ в формуле (9) мы должны провести предварительно разложение выражений типа $e^{-i u \sin(\epsilon \chi' + \psi)}$, $\sin(\epsilon \chi' + \psi) e^{-i u \sin(\epsilon \chi' + \psi)}$; $\cos(\epsilon \chi' + \psi) e^{-i u \sin(\epsilon \chi' + \psi)}$ в ряды по функциям Бесселя, а затем проинтегрировать (9) по χ и χ' :

$$\begin{aligned}
 G = \int_{-\infty}^{\infty} W(t) dt = \sum_{\lambda=g, f} G_{\lambda} = \frac{e^2}{(2\pi a)^2 c} \int_0^{\infty} \omega^2 d\omega \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \times \\
 \times \sum_{\lambda=g, f} \left\{ A_{\lambda} b^2 \sum_{v'=-\infty}^{\infty} J_{v'}(u) R_{n'}(v) e^{-i v' \psi} \cdot \sum_{v=-\infty}^{\infty} J_v(u) R_n(v) e^{i v \psi} + \right. \\
 + B_{\lambda} \sum_{v'=-\infty}^{\infty} J_{v'}(u) R_{n'}'(v) e^{-i v' \psi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} J_v(u) R_n'(v) e^{i v \psi} + \\
 + b C_{\lambda} e^{-i \beta} \sum_{v=-\infty}^{\infty} J_v(u) R_n(v) e^{i v \psi} \cdot \sum_{v'=-\infty}^{\infty} J_{v'}(u) R_{n'}'(v) e^{-i v' \psi} + \\
 \left. + b C_{\lambda} e^{i \beta} \sum_{v'=-\infty}^{\infty} J_{v'}(u) R_{n'}(v) e^{-i v' \psi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} J_v(u) R_n'(v) e^{i v \psi} \right\}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$R_n(v) = 2K_{in}(v) e^{\frac{n\pi}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\chi e^{i(v \operatorname{sh} \chi - n\chi)}.$$

$K_{in}(v)$ — функция Макдональда, $J_v(u)$ — функция Бесселя, $R_n(v)$ и $J_v'(u)$ — производные от соответствующих функций по их аргументам, $n = \epsilon v$. Проинтегрируем в (16) по ψ и снимем двойные суммы, используя свойства символа Кронекера. Мы получим формулы для полной энергии излучения в параллельных полях с учетом поляризационных эффектов:

$$\begin{aligned}
 G = \int_{-\infty}^{\infty} W(t) dt = \sum_{\lambda=g, f} G_{\lambda} = \frac{e^2}{2\pi a^2 c} \sum_{\lambda=g, f} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} \omega^2 d\omega \times \\
 \times \sum_{v=-\infty}^{\infty} \{ A_{\lambda} b^2 J_v'^2(u) R_n^2(v) + B_{\lambda} J_v^2(u) R_n'^2(v) + \\
 + 2b \cos \beta C_{\lambda} J_v(u) J_v'(u) R_n(v) R_n'(v) \}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

При исследовании круговой поляризации мы должны полагать $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$. Из подынтегрального выражения (17) видно, что благодаря обращению $\cos \beta$ в ноль при $\beta = \frac{\pi}{2}$ смешанный член, пропорциональный произведению $J_v(u) J_v'(u) R_n(v) R_n'(v)$ в формуле (17), при указан-

ном значении параметра β отсутствует. Полагая в (17) $b=0$, находим формулу (13) для полной энергии излучения заряженной частицей при гиперболическом движении ее вдоль оси z .

Важно подчеркнуть, что средняя мощность излучения заряженной частицей в рассматриваемых полях, вычисленная по формуле [9]

$$R_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt, \quad (18)$$

оказывается конечной величиной. Особый интерес поэтому представляет исследование на основе методов обобщенного гармонического анализа [9—11] спектральной плотности мощности излучения.

В соответствии с [1] изложенная теория применима при условии

$$\frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ll \frac{m_0^2 c^4}{e^3}, \quad (19)$$

где F — порядок величины внешнего поля в лабораторной системе отсчета, в которой частица с массой покоя m_0 движется со скоростью v .

Причем при полях $F \sim \frac{m_0^2 c^3}{\hbar e}$, т. е. когда $\hbar \omega_F \sim m_0 c^2$ ($\omega_F = \frac{eF}{m_0 c}$), классическая электродинамика становится неприменимой вследствие квантовых эффектов.

В заключение отметим, что целью настоящей работы является отработка методики для решения более реалистической задачи (см. также [12]), учитывающей, с одной стороны, действие на частицу силы радиационного трения, а с другой стороны, тот факт, что поля в действительности всегда занимают конечную область в пространстве. Учет последнего обстоятельства важен, так как известно, что в случае гиперболического движения сила радиационного трения равна нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Классическая теория поля. М., 1967.
2. Сб. «Синхротронное излучение» под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова. М., 1966.
3. Шафранов В. Д. Сб. «Вопросы теории плазмы», т. 3. М., 1963.
4. Куканов А. Б. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астр., 11, 606, 1971.
5. Ситенко А. Г., Коломенский А. А. ЖЭТФ, 30, 511, 1956.
6. Никишов А. И., Ритус В. И. ЖЭТФ, 56, 2035, 1969.
7. Сб. «Методы определения основных характеристик атомных ядер и элементарных частиц», гл. 3. М., 1965.
8. Куканов А. Б., Константинович А. В. «Вестн. Моск. ун-та», физ. астр., 13, 545, 1973.
9. Давенпорт В. Д., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. М., 1960.
10. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М., 1963.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., 1973, стр. 589—596.
12. Бункин Ф. В., Тугов И. И. ДАН СССР, 187, 541, 1969.

Поступила в редакцию
31.1 1973 г.

Кафедра
теоретической физики