Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1974

УДК 539.1.01

А. М. ВОЛОЩЕНКО

О ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОНА В ПОСТОЯННЫХ СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ С УЧЕТОМ РАДИАЦИОННОГО ТРЕНИЯ

Получены выражения для 4-скоростей и траектории электрона с учетом радиационного трения при движении во взаимно перпендикулярных и равных по величине электрическом и магнитном полях. Показано, что найденное решение отличается от точного решения уравнения Лоренца — Дирака на величину, меньшую квантовых поправок.

Для большого круга задач существенным является учет влияния реакции излучения на характер движения и излучения электрона во внешних электромагнитных полях. В последнее время появились работы, в которых найдено решение классических уравнений движения с учетом реакции излучения в постоянном магнитном поле [1, 2, 3], в постоянных, параллельных электрическом и магнитном полях [4], в поле электромагнитной волны [5, 6]. Влияние радиационного трения на излучение электрона в магнитном поле подробно исследовано в [7]. Интерес к данному кругу вопросов стимулируется в значительной степени возможными приложениями в астрофизике, а также созданием интенсивных электромагнитных полей и источников ультрарелятивистских электронов. В частности, получены магнитные поля со значением напряженности в импульсе $\sim 10^6 \div 10^7$ *гс* и электроны с энергией ~ 20 *Гэв*, а в ближайшем будущем с энергией вплоть до 500 *Гэв* [7, 8]. При таких условиях сила радиационного трения становится сравнимой с силой Лоренца, и движение электрона принимает аномальный характер [3].

Таким образом, теоретические выводы, основанные на классическом описании движения электрона с помощью уравнения Лоренца — Дирака, а также значения вычисленных квантовых поправок могут быть проверены экспериментально.

В настоящей работе находим траекторию движения электрона с учетом радиационного трения в скрещенных полях:

$$\mathbf{E} = \{E, 0, 0\}, \quad \mathbf{H} = \{0, E, 0\}. \tag{1}$$

Как известно, за исключением случая взаимно перпендикулярных и равных по величине электрического и магнитного полей, произвольное электромагнитное поле может быть сведено путем соответствующего преобразования Лоренца к случаю параллельных электрического и маг-

нитного полей, движение электрона в которых с учетом реакции излучения уже исследовано ранее [4].

Классическое уравнение Лоренца — Дирака [9], описывающее движение точечного электрона во внешнем электромагнитном поле с учетом реакции излучения, имеет вид [1]

$$mc\dot{u}^{\mu} = eF^{\mu\nu}u_{\nu} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^2}(u^{\mu}\dot{u}_{\nu}\dot{u}^{\nu} + \ddot{u}^{\mu}). \tag{2}$$

Здесь $F^{\mu\nu}$ — тензор внешнего электромагнитного поля, определенный так же, как и в [10], $u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{cd\tau}$ — 4-скорость электрона. Точкой здесь и в дальнейшем обозначается производная по собственному времени τ. Наиболее эффективным методом решения уравнения (2) является метод итераций [10]. Для конфигурации полей (1) уравнение, полученное первой итерацией (2), в компонентах имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{u}_0 &= \omega u_x - \delta\lambda^2 u_0 + \delta\lambda, \\ \dot{u}_z &= \omega u_x - \delta\lambda^2 u_z + \delta\lambda, \end{aligned} \qquad \delta = \tau_0\omega^2,\ \tau_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3},$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_x &= \omega\lambda - \delta\lambda^2 u_x, \\ \dot{u}_y &= -\delta\lambda^2 u_y, \end{aligned} \qquad \omega = \frac{eE}{mc},\ \lambda = u_0 - u_z. \tag{3}$$

Отношение силы радиационного трения ($f_{\text{рад}}$) к силе Лоренца ($f_{\text{лор}}$) при $\lambda \gg 1$ определяется параметром $R = \frac{\delta\lambda^2}{\omega} \sim \frac{f_{\text{рад}}}{f_{\text{лор}}}$. Величина квантовых поправок [11], связанных с квантовой отдачей фотона при излучении, определяется параметром

$$\chi = \frac{e\hbar}{m^3c^4}\sqrt{-(F_{\mu\nu}P^{\nu})^2} = \frac{e\hbar E\lambda}{m^2c^3} = \frac{3}{2}\frac{\delta\lambda}{\omega\alpha}.$$

Здесь P^{ν} — 4-импульс электрона, $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$. Из сравнения параметров R и χ ясно, что существует область классического описания движения $\chi \ll 1$, в которой сила радиационного трения больше силы Лоренца.

Система уравнений (3) может быть решена точно. Вычитая второе уравнение системы из первого, получим уравнение для величины λ, которая является интегралом движения в отсутствие силы радиационного трения:

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = -\delta\lambda^3, \tag{4}$$

отсюда

$$\lambda(\tau) = \frac{\lambda_0}{(1 + 2\lambda_0^2\delta\tau)^{1/2}},$$

где

$$\lambda_0 = \lambda(0) = u_0(0)(1 - \beta_{z0}). \tag{5}$$

Подставляя (5) в последние два уравнения системы (3), после проведения интегрирования, найдем

[1] В работе используется псевдоевклидова метрика, в которой скалярное произведение 4-векторов определяется как $a_{\mu}b^{\mu} = a^{\circ}b^{\circ} - \mathbf{a}\,\mathbf{b}$.

$$u_x(\tau) = \frac{\lambda_0\omega\tau + u_{x0}}{(1 + 2\lambda_0^2\delta\tau)^{1/2}}, \quad u_y(\tau) = \frac{u_{y0}}{(1 + 2\lambda_0^2\delta\tau)^{1/2}}. \tag{6}$$

Отметим, что интеграл движения

$$\frac{\lambda}{u_y} = \frac{1 - \beta_z}{\beta_y} = \text{const} \tag{7}$$

можно получить непосредственно и из уравнения (1), не производя итерирования [12].

Используя (5), (6), интегрируем первые два уравнения системы (3):

$$u_0(\tau) = \frac{\frac{1}{2}\lambda_0\omega^2\tau^2 + (\omega u_{x0} + \delta\lambda_0)\tau + u_0(0)}{(1 + 2\lambda_0^2\delta\tau)^{1/2}},$$

$$u_z(\tau) = \frac{\frac{1}{2}\lambda_0\omega^2\tau^2 + (\omega u_{x0} + \delta\lambda_0)\tau + u_{z0}}{(1 + 2\lambda_0^2\delta\tau)^{1/2}}. \tag{8}$$

Как видно из (5), (6) и (8), при достаточно малых собственных временах $\lambda_0^2\delta\tau \ll 1$ радиационное трение еще не успевает существенно повлиять на характер движения, и решение будет иметь практически такой же вид, как и при отсутствии радиационного трения. В случае же $\lambda_0^2\delta\tau \gg 1$ из (6) и (8) получим

$$u_0(\tau) \cong \frac{1}{2\sqrt{2\delta}}\omega^2\tau^{3/2} + \frac{1}{\lambda_0\sqrt{2\delta}}(\omega u_{x0} + \delta\lambda_0)\tau^{1/2} + \frac{u_0(0)}{\lambda_0\sqrt{2\delta}}\tau^{-1/2},$$

$$u_z(\tau) \cong \frac{1}{2\sqrt{2\delta}}\omega^2\tau^{3/2} + \frac{1}{\lambda_0\sqrt{2\delta}}(\omega u_{x0} + \delta\lambda_0)\tau^{1/2} + \frac{u_{z0}}{\lambda_0\sqrt{2\delta}}\tau^{-1/2}, \tag{9}$$

$$u_x(\tau) \cong \frac{1}{\sqrt{2\delta}}\omega\tau^{1/2} + \frac{u_{x0}}{\lambda_0\sqrt{2\delta}}\tau^{-1/2}, \quad u_y(\tau) \cong \frac{u_{y0}}{\lambda_0\sqrt{2\delta}}\tau^{-1/2}.$$

Как следует из (9), радиационное трение приводит к некоторому замедлению роста 4-скоростей.

Еще раз интегрируя (6) и (8), получим выражение для траектории, а также связь лабораторного времени t и собственного времени τ:

$$t(\tau) = \frac{\omega^2}{8\delta^3\lambda_0^5}\left[\frac{1}{5}(q^5 - 1) - \frac{2}{3}(q^3 - 1) + (q - 1)\right] +$$

$$+ \frac{(\omega u_{x0} + \delta\lambda_0)}{2\delta^2\lambda_0^4}\left[\frac{1}{3}(q^3 - 1) - (q - 1)\right] + \frac{u_0(0)}{\delta\lambda_0^2}(q - 1),$$

$$z(\tau) = ct(\tau) - \frac{c}{\delta\lambda_0}(q - 1) + z(0), \tag{10}$$

$$x(\tau) = \frac{c\omega}{2\delta^2\lambda_0^3}\left[\frac{1}{3}(q^3 - 1) - (q - 1)\right] + \frac{cu_{x0}}{\delta\lambda_0^2}(q - 1) + x(0),$$

$$y(\tau) = \frac{cu_{y0}}{\delta\lambda_0^2}(q - 1) + y(0), \quad q = (1 + 2\lambda_0^2\delta\tau)^{1/2}.$$

Формулы (10) полностью определяют в параметрическом виде траекторию движения электрона в скрещенных полях (1) с учетом радиационного трения. Для достаточно малых собственных времен $\lambda_0^2 \delta\tau \ll 1$ они переходят в формулы (11), практически совпадающие с уравнениями для траектории, в отсутствие радиационного трения:

$$t(\tau) = \frac{1}{6}\lambda_0\omega^2\tau^3 + \frac{1}{2}(\omega u_{x0} + \delta\lambda_0)\tau^2 + u_0(0)\tau,$$

$$z(\tau) = \frac{1}{6}\lambda_0 c\omega^2\tau^3 + \frac{1}{2}c(\omega u_{x0} + \delta\lambda_0)\tau^2 + cu_{z0}\tau + z(0), \qquad (11)$$

$$x(\tau) = \frac{1}{2}\lambda_0 c\omega\tau^2 + cu_{x0}\tau + x(0), \quad y(\tau) = cu_{y0}\tau + y(0).$$

В случае же $\lambda_0^2 \delta\tau \gg 1$ искажение траектории вследствие радиационного трения будет существенным.

Поскольку исходная система уравнений (3) получена первой итерацией уравнения (2), т. е. является приближенной, оценим величину поправок к полученному решению, которые дают последующие итерации уравнения Лоренца — Дирака. Выпишем соответствующее уравнение для λ:

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = -\delta\lambda^3\left(1 - \frac{2\delta^2\lambda^2}{\omega^2} + 0\left(\frac{\delta^4\lambda^4}{\omega^4}\right)\right). \qquad (12)$$

В классической области величина $\frac{\delta\lambda}{\omega} = \frac{2}{3}\chi\alpha \ll 1$. Учитывая это при интегрировании (12), получим

$$\lambda = \lambda_1\left(1 + \frac{2\delta^2\lambda_1^2}{\omega^2}\ln\frac{\lambda_0}{\lambda_1} + 0\left(\frac{\delta^4\lambda_1^4}{\omega^4}\right)\right) = \lambda_1 + \Delta\lambda_{\text{кл}},$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{(1 + 2\lambda_0^2\delta\tau)^{1/2}}. \qquad (13)$$

Отметим далее, что величина $mc^2u_0\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dt}$ определяет необратимые потери, связанные с излучением. Используя квантовомеханические формулы для интенсивности излучения ультрарелятивистского электрона, приведенные в [11, 13], можно записать, что для случая $\chi \ll 1$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = -\delta\lambda^3\left(1 - \frac{55\sqrt{3}}{48}(3\chi) + \frac{16}{3}(3\chi)^2 - \ldots\right), \quad \chi = \frac{3}{2}\frac{\delta\lambda}{\omega\alpha}. \qquad (14)$$

Здесь под λ подразумевается квантовомеханическое среднее значение этой величины. Из сравнения (12) и (14) видно, что классические радиационные поправки в (12) меньше квантовых поправок. «Происхождение» поправок типа $\Delta\lambda_{\text{кл}}$ обсуждено в [7]. Кроме того, классические радиационные поправки $\Delta\lambda_{\text{кл}}$ будут меньше квантового разброса, связанного с отдачей при излучении. Действительно, максимум интенсивности излучения в классической области приходится на значения $\chi \sim \varkappa^{1/2}$,
где

$$\varkappa = \frac{e\hbar^2}{m^3c^4}\sqrt{-(F_{\mu\nu}k^\nu)^2} = \frac{e\hbar^2 E(k_0 - k_z)}{m^3c^4},$$

а k^μ — 4-импульс излученного фотона. Следовательно, при излучении фотона вблизи максимума интенсивности

$$\Delta\lambda \sim \frac{\hbar}{mc}(k_0 - k_z)_{\max} \sim \frac{\delta\lambda^2}{\omega\alpha} \gg \Delta\lambda_{\text{кл}}.$$

Другими словами, при решении уравнения (2) методом итераций для данной конфигурации полей разложение фактически ведется по параметру $\frac{\delta\lambda}{\omega}$ (это связано с тем, что всегда можно выбрать систему отсчета, в которой сила радиационного трения много меньше силы Лоренца, а уравнение (1) имеет релятивистски-инвариантный характер [10]), который меньше в $1/\alpha$ раз квантового параметра χ. Поэтому достаточно ограничиться первой итерацией уравнения Лоренца — Дирака. Аналогичные замечания могут быть сделаны и относительно решений, полученных в [2, 4].

Приведем также формулы для полной мощности излучения (13) и для полной излученной энергии за время t (14):

$$P_{\text{изл}}(t) = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\dot{u}_\mu \dot{u}^\mu = mc^2\,\delta\lambda^2 = \frac{mc^2\,\delta\lambda_0^2}{(1+2\lambda_0^2\,\delta\tau)},$$

$$E_{\text{изл}}(t) = \int_0^t P_{\text{изл}}(t)\,dt = mc^2\left\{\frac{\omega^2}{8\delta^2\lambda_0^3}\left[\frac{1}{3}(q^3-1) - 2(q-1) - \right.\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{q} - 1\right)\right] + \frac{(\omega u_{x0} + \delta\lambda_0)}{2\delta\lambda_0^2}\left[(q-1) + \left(\frac{1}{q} - 1\right)\right] -$$

$$\left. - u_0(0)\left(\frac{1}{q} - 1\right)\right\}.$$

В заключение автор выражает благодарность участникам семинара А. А. Соколова за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Plass G. N. Rev. Mod. Phys., **33**, 37, 1961.
2. Гернет Г. Е. ДАН СССР, **168**, 63, 1966.
3. Jaffe T. Phys. Rev., **D5**, 2909, 1972.
4. Mitchell T. P., Chirivella J., Lingerfelt J. E. Plasma Phys., **13**, 387, 1971.
5. Воронин В. С., Коломенский А. А. ЖЭТФ, **47**, 1528, 1964.
6. Gunn J., Ostriker J. Astrophys. J., **165**, 523, 1971.
7. Shen C. S. Phys. Rev., **D6**, 2736, 1972.
8. Erber T. Acta Phys. Austr., Suppl. **8**, 323, 1971.
9. Dirac P. A. M. Proc. Roy. Soc., (London), **A167**, **148**, 1938; Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля. М., 1951.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1967.
11. Никишов А. И., Ритус В. И. ЖЭТФ, **46**, 776, 1964; **52**, 1707, 1967.
12. Sen Gupta N. D. Phys. Rev., **D5**, 1546, 1972.
13. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., 1974.

Поступила в редакцию
13.1 1973 г.

Кафедра
теоретической физики