Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1974

УДК 621.391, 531.5

В. А. БУРОВ, О. В. ДМИТРИЕВ

# СОГЛАСОВАННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ МАЛОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ С РЕЗОНАНСНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПРИЕМНИКОВ

Рассматривается вопрос о согласованной фильтрации электрических сигналов, полученных в результате преобразования механических колебаний высокодобротных резонансных приемников гравитационного излучения. Предполагается, что гравитационное возмущение представляет собой импульс. Полученные результаты распространяются на случай импульсов конечной длительности.

Применяемые в настоящее время приемники гравитационного излучения представляют собой массивные механические резонаторы высокой добротности с возбуждением колебаний за счет их квадрупольного момента. Колебания механического осциллятора на низшей резонансной частоте преобразуются затем в электрические сигналы с помощью тензодатчиков или датчиков смещения.

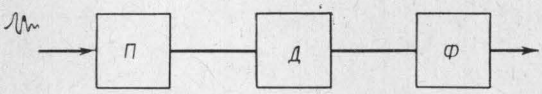


Рис. 1

Как при использовании одного приемника, так и группы, электрические сигналы каждого из датчиков необходимо подвергнуть фильтрации, повышающей помехоустойчивость системы обнаружения. Определение оптимальной частотной характеристики фильтра, а также оценка значений параметров элементов приемного тракта, обеспечивающих максимальную помехоустойчивость приема, представляет в этой связи определенный интерес.

Таким образом предполагается, что прием гравитационного излучения производится по схеме рис. 1. На приемник квадрупольного излучения (*П*) поступает гравитационное возмущение, которое с помощью датчика (*Д*) преобразуется в электрический сигнал. Выходной сигнал датчика $v(t)$ имеет вид

$$v(t) = n(t) + s(t), \tag{1}$$

где $s(t)$ — полезный сигнал, а $n(t)$ — суммарная помеха.

Если считать, что форма сигнала $s(t)$ известна, а помеха $n(t)$ является гауссовским случайным процессом, то оптимальная обработка

$v(t)$ заключается в максимизации отношения сигнал/помеха на выходе фильтра ($\Phi$).

Пусть спектр сигнала $s(t)$ равен $S(\omega)$, а спектральная плотность мощности шума $N(\omega)$. Тогда, если передаточная функция фильтра равна $H(\omega)$, отношение пиковой мощноти сигнала к средней мощности помехи на выходе фильтра имеет вид

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S(\omega) d\omega \right|^2}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 N(\omega) d\omega}. \tag{2}$$

Максимальное из всех значений $\rho$ будет получено, если $H(\omega)$ выбрана следующим образом [1]:

$$H(\omega) = S^*(\omega)/N(\omega), \tag{3}$$

где $S^*(\omega)$ — функция комплексно-сопряженная $S(\omega)$. Отношение сигнал/помеха на выходе фильтра с передаточной функцией (3) $\rho_{max}$ имеет вид

$$\rho_{max} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{N(\omega)} d\omega. \tag{4}$$

Вид спектра электрического сигнала $s(t)$ определяется формой ожидаемого гравитационного возмущения. Поскольку в настоящее время уделяется внимание приему коротких импульсов гравитационного излучения [2—4], спектр возмущения будет предполагаться белым, а затем будет оценено влияние конечной длительности сигнала.

Если датчик является безынерционным с плоской частотной характеристикой, то энергетический спектр сигнала на выходе датчика определяется квадратом частотной характеристики приемного резонатора

$$|S(\omega)|^2 = \beta C^2(\omega), \tag{5}$$

где

$$C^2(\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{Q}}. \tag{6}$$

В (6) $\omega_0$ — резонансная частота, а $Q$ — добротность приемника.

Если $E_{гр}$ — энергия колебаний приемного элемента, обусловленная гравитационным возмущением, а $\gamma$ — чувствительность датчика, то полная энергия электрического сигнала $s(t)$ будет

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \gamma E_{гр} \frac{Q}{\omega_0}. \tag{7}$$

При определении нормированного множителя $\beta$, входящего в (5), для узкополосной системы с полосой $\Delta\omega$, удовлетворяющей условию

$$\Delta\omega/\omega_0 = 1/Q \ll 1, \tag{8}$$

вместо $C^2(\omega)$ в форме (6) можно использовать

$$C^2(\delta\omega) \simeq \frac{\omega_0^2}{4} \cdot \frac{1}{(\delta\omega_0)^2 + \omega_0/4Q^2}, \tag{9}$$

где $\delta\omega$ — расстройка относительно $\omega_0$. Производя интегрирование с учетом (9),

$$\beta = \frac{2\gamma E_{\text{гр}}}{\omega_0^2}. \tag{10}$$

Таким образом энергетический спектр сигнала на выходе датчика полностью определен.

Помеха $n(t)$ представляет собой совокупность шума датчика $n_{\text{д}}(t)$ и тепловых колебаний резонансного приемника $n_n(t)$:

$$n(t) = n_{\text{д}}(t) + n_n(t).$$

Шум датчика обусловлен его структурными особенностями и имеет термодинамическую, квантовую или другую флуктуационную природу. Этот шум обычно занимает значительно более широкий участок спектра, чем тепловой шум приемника, и может быть аппроксимирован белым шумом со спектральной плотностью $N_0$.

Спектр термического компонента $n_n(t)$ так же, как и $|S(\omega)|^2$, определяется квадратом частотной характеристики резонансного приемника и представим в виде

$$N_n(\omega) = \alpha C^2(\omega). \tag{11}$$

Средняя мощность $n_n(t)$ определяется средней кинетической или потенциальной, что зависит от типа датчика, энергией тепловых колебаний приемника, которая, как известно, для низкочастотного механического осциллятора равна $\frac{1}{2}kT$. Тогда из (11)

$$\frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty C^2(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2}\gamma kT. \tag{12}$$

Из (12) и (9)

$$\alpha = \frac{\gamma kT}{\omega_0 Q}. \tag{13}$$

Результирующая спектральная плотность мощности помехи $n(t)$ будет

$$N(\omega) = N_0 + \frac{\gamma kT}{\omega_0 Q} C^2(\omega). \tag{14}$$

Выражение для отношения сигнал/помеха на выходе фильтра (4) при оптимальной фильтрации с учетом (9) принимает вид

$$\rho_{\max} = \gamma E_{\text{гр}}/[N_0\,\Delta\omega\,(\gamma kT + N_0\,\Delta\omega)]^{1/2}. \tag{15}$$

Из (15) ясна роль основных параметров приемного тракта $\Delta\omega$, $N_0$, а также температуры установки $T$ в формировании выходного отношения сигнал/помеха. Величины $\Delta\omega$ и $N_0$ входят в (15) лишь в форме произведения, поэтому в предположении $\delta$-образной формы принимаемого возмущения при $\Delta\omega N_0 \to 0$ отношение $\rho_{\max}$ неограниченно растет. При конечной величине $\Delta\omega N_0$ снижение температуры целесообразно лишь до определенных пределов.

В случае приема гравитационных импульсов конечной, но малой длительности можно считать, что спектр гравитационного возмущения ограничен некоторой полосой частот и симметричен относительно резонансной частоты приемника $\omega_0$ в интервале $\omega_0 \pm \omega'$, причем

$$\omega' \gg \Delta\omega. \tag{16}$$

Кроме того, для получения оценочных результатов спектр импульса будет предполагаться равномерным в полосе частот $2\omega'$.

Нормировочный множитель в выражении спектра сигнала (5) при ограничении полосы будет отличаться от $\beta$, определяемого (10), а коэффициент $\alpha$, входящий в (11), остается прежним. Отношение сигнал/помеха на выходе фильтра с характеристикой (4) в этом случае будет:

$$\rho'_{max} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\omega_0-\omega'}^{\omega_0+\omega'} \frac{\beta' C^2(\omega)}{N_0 + \alpha C^2(\omega)} d\omega. \tag{17}$$

В (17) $\beta'$ — новый нормировочный множитель, который при выполнении (16), того же порядка, что и $\beta$:

$$\beta' \simeq \frac{2\gamma E_{гр}}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\pi\omega'}\right) \sim \beta. \tag{18}$$

Произведя в (17) интегрирование с учетом (9), (16) и (18), запишем

$$\rho'_{max} = \frac{2}{\pi} \rho_{max} \operatorname{arctg} \frac{2\omega'\xi}{\Delta\omega}, \tag{19}$$

где

$$\xi = \frac{\sqrt{N_0 \Delta\omega}}{\sqrt{N_0 \Delta\omega + \gamma kT}}. \tag{20}$$

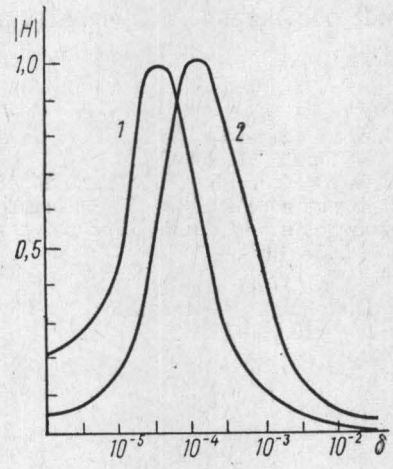


Рис. 2

Поведение $\rho'_{max}$ определяется соотношением между спектральной плотностью шума датчика $N_0$ и спектральной плотностью $N_n(\omega)$. Так, если $N_0$ значительно превосходит плотность тепловых шумов приемника на частотах $\omega_0 \pm \omega'$,

$$N_n(\omega_0 \pm \omega') \ll N_0, \tag{21}$$

то ограничение полосы сигнала слабо влияет на выходное отношение сигнал/помеха, и $\rho'_{max}$ того же порядка, что и $\rho_{max}$, определяемое в (15). Если выполнены неравенства, обратные (21), то шум датчика не влияет на помехоустойчивость системы. При этом

$$\rho'_{max} \simeq \frac{1}{\pi} \frac{4E_{гр}\omega'}{kT\Delta\omega}. \tag{22}$$

Таким образом, при ограничении полосы сигнала значениями $\omega_0 \pm \omega'$ шум датчика желательно снижать во всяком случае до величины

$$N_0 \leqslant N_n(\omega_0 \pm \omega');$$

при этом выходное отношение сигнал/помеха определяется лишь энергией гравитационного возмущения и энергией тепловых шумов приемника. Кроме того, из выражений (15) и (22) следует, что в любом слу-

чае увеличение добротности приемника гравитационного излучения позволяет повысить помехоустойчивость приема.

На рис. 2 изображены нормированные частотные характеристики согласованного фильтра, рассчитанного для следующих соотношений между спектральной плотностью термического шума на резонансной частоте $N_n(\omega_0)$ и шума датчика $N_0$: кривая *1* — $N_0 \sim 10^{-2}\ N_n(\omega_0)$; кривая *2* — $N_0 \sim 5 \cdot 10^{-4}\ N_n(\omega_0)$.

По оси абсцисс отложена относительная расстройка $\delta = \omega - \omega_0/\omega_0$. Добротность $Q \sim 10^5$. Приведенные соотношения между $N_0$ и $N_n(\omega)$, по-видимому, соответствуют имеющимся в настоящее время в экспериментальных установках.

В заключение авторы выражают благодарность проф. В. А. Красильникову, проф. В. Б. Брагинскому, а также В. Н. Руденко за полезное обсуждение полученных результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. М., 1960.
2. Weber J. Phys. Rev. Lett., **25**, 180, 1970.
3. Брагинский В. Б. Физические эксперименты с пробными телами. М., 1950.
4. Брагинский В. Б., Зельдович Я. Б., Руденко В. Н. Письма ЖЭТФ, **10**, 437, 1969.

Поступила в редакцию
19.1 1973 г.

Кафедра
акустики