Вестник московского университета

№ 6-1974

and

УДК 538.565

= Can

М. Д. КАРАСЕВ, Е. Ю. СМИРНОВА, А. Н. СЕНИН

НЕЛИНЕЙНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ЧЕТНЫХ ГАРМОНИК В РЕЗОНАНСНОМ КОНТУРЕ

Проведено исследование параметрического механизма возбуждения четных гармоник в резонансном последовательном контуре с реактивной нелинейностью, имеющей нечетную характеристику. Результаты расчета сопоставлены с экспериментом.

Как известно (например, [1]), в последовательном колебательном контуре, содержащем железо или сегнетоэлектрик, характеристики которых описываются нечетной функцией, экспериментально наблюдается возбуждение четных гармоник.

В работе [1] показана принципиальная возможность теоретического описания методом малого параметра параметрического механизма возбуждения второй гармоники в контуре с реактивной нелинейностью, представленной нечетной функцией (кубическим полиномом). Но при этом возбуждение второй гармоники получается лишь во втором приближении малого параметра в очень узкой полосе частот и обязательно требует затухания второго порядка малости (высокой добротности системы), что не соответствует опытным данным.

В настоящей работе дано адекватное теоретическое описание процесса возбуждения четных гармоник в контуре с нечетной нелинейностью. Результаты теоретических расчетов сопоставлены с экспериментом.

Характеристики нелинейных элементов и качественное рассмотрение процесса

Зависимость индукции от напряженности поля у железа и сегнетоэлектрика имеет вид петли гистерезиса. Обычно гистерезисом пренебрегают и описывают характеристику полиномом третьей степени [1].

Аналитическое описание петли гистерезиса в общем случае весьма сложно и способ аппроксимации ее обычно выбирается в зависимости от конкретной задачи. Если считать частоту p внешнего воздействия постоянной и рассматривать процессы, близкие к гармоническим, то гистерезис можно учесть членом вида xe^{-ax^2} , где x — заряд на конденсаторе для сегнетоэлектрика или магнитный поток для ферромагнетика. В первом приближении указанная экспоненциальная зависимость может быть представлена положительным двучленом:

$$xe^{-ax^{*}} = x(1-ax^{2}) \ge 0.$$
 (1)

При учете нелинейности кубическим членом гистерезисная петля, например ферромагнетика, описывается выражением

$$i = \alpha x + \beta x^3 + b \left(1 - a x^2\right) x,$$

где *х* — магнитный поток.

Уравнение, описывающее процессы в последовательном контуре с ферромагнетиком или сегнетоэлектриком, возникающие под действием синусоидальной э. д. с., в этом случае имеет вид

$$x + 2\delta (1 - ax^2) x + \omega_0^2 x + \beta_0 x^3 = \lambda \sin pt.$$
 (2)

В общем случае без наложения условия (1) уравнение представляет собой комбинацию двух нелинейных уравнений Диффинга и Вандер-Поля. Помимо учета гистерезиса это уравнение может служить моделью сложных автоколебательных систем. Известны и решения такого уравнения сведением к первому интегралу движения [2]. К сожалению, дополнительные условия, налагаемые при этом на коэффициенты уравнения (2), исключают из рассмотрения наиболее интересные автоколебательные режимы и резонансы.

Сам по себе гистерезис не может породить четные гармоники в нелинейном контуре, содержащем железо или сегнетоэлектрик при гармоническом воздействии. Как видно из структуры гистерезисного члена (1), он вносит дополнительные нелинейные потери, однако характер нелинейности в уравнении (2) остается нечетным, и в отсутствие параметрического возбуждения [1] наличие гистерезиса не может вызвать появление четных гармоник.

Рассмотрим более детально особенности резонансных характеристик контура с железом. Как известно, резонансная частота колебаний при увеличении амплитуды внешнего воздействия сначала уменьшается до некоторого значения, а затем начинает расти; кривая, проходящая через вершины гистерезисных петель, имеет перегиб и для ее описания принципиально необходим полином пятой степени:

$$i = \alpha \Phi - \beta \Phi^3 + \gamma \Phi^5. \tag{3}$$

Аппроксимируя неоднозначность характеристики выражением (1), получим зависимость тока от магнитного потока для ферромагнетика в виде

$$i = \alpha \Phi - \beta \Phi^3 + \gamma \Phi^5 + b \left(1 - a \Phi^2\right) \Phi.$$
(4)

Такая аппроксимация гистерезисной петли позволяет оценить влияние неоднозначности характеристики на процесс параметрического возбуждения второй гармоники.

Расчет

Уравнение движения в контуре с затуханием, находящимся под внешним воздействием (— $u \cos pt$), после стандартных преобразований примет вид

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} (1 - a_0 x^2) + \omega_0^2 x - \beta_0 x^3 + \gamma_0 x^5 = up \sin pt,$$
(5)

где

$$x = \Phi; \ \omega_0^2 = \frac{\alpha}{c}; \ \ \beta_0 = \frac{\beta}{c}; \ \ \gamma_0 = \frac{\gamma}{c}; \ \ 2\delta = \alpha R + \frac{b}{c}; \ \ a_0 = \frac{ab}{2\delta};$$

716

Введем замену переменных:

$$x = y + \frac{u_p}{\omega_0^2 - p^2} \sin pt = y + A \sin pt.$$
 (6)

Подставляя (6) в (5), получаем уравнение движения относительно у:

 $\ddot{y} + (k^2 + m_2 \cos 2pt + m_2 \sin 2pt + m_4 \cos 4pt) y = f(y, \ddot{y}, A, t), \quad (7)$

где

$$\begin{split} k^2 &= \omega_0^2 - \frac{3}{2} \ \beta_0 A^2 + \frac{15}{8} \ \gamma_0 A^4; \\ m_2 &= \frac{3}{2} \ \beta_0 A^2 - \frac{5}{2} \ \gamma_0 A^4; \quad m_2^{'} = 2 \delta a_0 p A^2; \\ m_4 &= \frac{5}{8} \ \gamma_0 A^4; \end{split}$$

$$f(y, \dot{y}, \dot{A}, t) = \beta_0 (y^3 + 3y^2 A \sin pt + A^3 \sin^3 pt) - \gamma_0 (y^5 + 5y^4 A \sin pt + 10y^3 A^2 \sin^2 pt + 10y^2 A^3 \sin^3 pt + A^5 \sin^5 pt) - 2\delta \dot{y} (1 - a_0 y^2 - 2a_0 y A \sin pt - aA^2 \sin^2 pt) - 2\delta A p \cos pt (1 - a_0 y^2 - aA^2 \sin^2 pt).$$
(8)

Из вида уравнения (7) сразу можно заключить, что модуляция параметра, описываемая членом $m_4 \cos 4pt$, вызовет генерацию второй гармоники внешнего воздействия частоты p, причем в этом случае генерация на частоте 2p возникнет в первой зоне Матье. Так как m_4 пропорционально коэффициенту γ при пятой степени аппроксимирующего полинома и не зависит ни от коэффициента β при третьей степени полинома, ни от коэффициента a, учитывающего неоднозначность характеристики нелинейного элемента, то можно в первом приближении считать, что коэффициенты β и a качественно не влияют на процесс возбуждения второй гармоники, а вносят лишь численные поправки для ширины зоны, амплитуды и фазы возбуждающихся колебаний. Только при очень больших добротностях контура возможна генерация во второй зоне Матье [1] и появление качественно иных явлений, связанных с неоднозначностью характеристики и коэффициентом β . Если бы гистерезис описывался полиномом пятой степени, то коэффициентами β_0 и a_0 можно пренебречь.

Учитывая вышесказанное, будем пренебрегать коэффициентами β_0 и a_0 и решим уравнение (7), полагая затухание и нелинейность малыми ($\delta \sim \mu$, $\gamma_0 \sim \mu$, где μ — малый параметр) [3]. Решение будем искать в виде ряда по степеням малого параметра, полагая

$$k^2 = 4p^2 + \mu \alpha_1 + \mu^2 \alpha_2 + \dots$$
 (9)

$$y = y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots$$
 (10)

Подставляя (9) и (10) в (7) и собирая члены при одинаковых степенях µ, получаем

$$y_0 + 4p^2 y_0 = 0, (11)$$

717

$$\ddot{y}_{1} + 4p^{2}y_{1} + \alpha_{1}y_{0} + m_{4}y_{0}\cos 4pt =$$

$$= -2\delta \dot{y}_{0} - 2\delta Ap\cos pt - \gamma_{0} (y_{0}^{5} + A^{5}\sin^{5}pt + 10y^{2}A^{3}\sin^{3}pt + 10y_{0}^{3}A^{2}\sin^{2}pt + 5y_{0}^{4}\sin pt).$$
(12)

Подставляя решение уравнения (11)

 $y_0 = a_0 \cos 2pt + b_0 \sin 2pt$

в уравнение первого приближения (12) и приравнивая нулю коэффициенты при cos 2pt и sin 2pt, получаем систему однородных уравнений:

$$4a_{0}p\delta + b_{0}\left(\frac{5}{8}\gamma_{0}R_{0}^{4} - \frac{15}{4}\gamma_{0}A^{2}R_{0}^{2} - \alpha_{1} + \frac{1}{2}m_{4}\right) = 0,$$

$$a_{0}\left(\frac{5}{8}\gamma_{0}R_{0}^{4} - \frac{15}{4}\gamma_{0}A^{2}R_{0}^{2} - \alpha_{1} - \frac{1}{2}m_{4}\right) - 4p\delta b_{0} = 0,$$

$$R_{0}^{2} = a_{0}^{2} + b_{0}^{2}.$$
(13)

(13)

где

Полагая детерминант системы (13) равным нулю, получаем выражение для ширины полосы возбуждения, амплитуды и фазы второй гармоники:

$$\frac{5}{8} \gamma_0 R_0^4 + \frac{15}{4} \gamma_0 R_0^2 A^2 - \sqrt{\left(\frac{m_4}{2}\right)^2 - 16p^2 \delta^2} \leqslant \alpha_1 \leqslant \\ \leqslant \frac{5}{8} \gamma_0 R_0^4 + \frac{15}{4} \gamma_0 R_0^2 A^2 + \sqrt{\left(\frac{m_4}{2}\right)^2 - 16p^2 \delta^2};$$
(14)

$$\frac{5}{8} \gamma_0 R_0^4 + \frac{15}{4} \gamma_0 R_0^2 A^2 + \alpha_1 \pm \sqrt{\left(\frac{m_4}{2}\right)^2 - 16p^2 \delta^2} = 0; \quad (15)$$

$${}^{4}g \, \varphi = \frac{4\rho o}{\frac{15}{4} \gamma_0 R_0^2 A^2 + \frac{5}{8} \gamma_0 R_0^4 + \alpha_1 - \frac{1}{2} m_4} }.$$
 (16)

Амплитудно-частотные характеристики второй гармоники

Коэффициенты биквадратного уравнения (15): расстройка α₁ и глубина модуляции параметра m4, зависящие от амплитуды первой гармоники А в контуре, зависят от частоты. Поскольку возбуждение второй гармоники происходит в первой зоне Матье, пренебрегать этой зависимостью, как в работе [1], не следует, так как ширина полосы возбуждения достаточно велика. Так как γ_0 и A^2 в уравнении (15) величины существенно положительные, действительное решение для R_0^2 существует при

$$\alpha_1 \pm \sqrt{\left(\frac{m_4}{2}\right)^2 - 16p^2\delta^2} \ll 0, \qquad (17)$$

где α_1 и m_4 определяются из (8). Графическое решение неравенства (17) в отсутствие затухания и при фиксированном внешнем воздействии показано на рис. 1, а. При достаточно малых амплитудах генератора расстройка α₁ может принимать отрицательные значения. Тогда решение уравнения (15), соответствующее знаку минус, существует в области частот от p_3 до p_6 , а решение, соответствующее знаку плюс, в области частот от p_4 до p_5 . Вид амплитудных характеристик показан на рис. 1, б. Существует две ветви решения, нижняя из которых неустойчива.

При учете затухания $\delta \neq 0$ и существует некоторое $p_{\rm kp}$, определяемое выражением

$$\frac{m_4^2}{4} - 16p_{\rm Kp}^2\,\delta^2 = 0.$$

Очевидно, что уравнение (15) имеет решение лишь при $p > p_{\rm kp}$ (рис. 2, *a*). На рис. 2, *б* показано графическое решение неравенства (17) и амплитудно-частотные характеристики при различных затуханиях. При зату-



Рис. 1. Графическое решение неравенства (17), амплитудные характеристики второй гармоники при различных затуханиях и амплитудах внешнего воздействия

ханиях, для которых $p_{\rm KP} < p_1$, где p_1 — частота, при которой обращается в нуль расстройка α_1 , уравнение (17) имеет два решения; при затуханиях, для которых $p_{\rm KP} = p_1$, кривые имеют общую точку, лежащую на скелетной кривой, на границе полосы возбуждения (рис. 1, б). При дальнейшем увеличении затухания зона параметрического воз-



Рис. 2. Характерные осциллограммы токов и их гармонический анализ

буждения сужается, как показано на рис. 2, δ (δ_2). При затухании, соответствующем $p_{\rm kp} = p_2$, где p_2 — вторая частота обращения в нуль расстройки α_1 , зона параметрического возбуждения стягивается в точку, а амплитуда второй гармоники обращается в нуль ($\delta_{\rm kp}$ на рис. 2, δ).

Таким образом, при заданном внешнем воздействии существует критическое затухание, величина которого определяется из формулы

$$\delta_{\rm KP} = \sqrt{\frac{4p_2^2 - \omega_0^2}{48p_2^2}},$$

где p2 — наибольший положительный корень уравнения

$$\omega_0^2 + \frac{15}{8} \gamma_0 \left(\frac{U_p}{\omega_0^2 - p^2} \right)^4 - 4p^2 = 0.$$

При $\delta > \delta_{\kappa p}$ вторая гармоника не возбуждается.

Рассмотрим, наконец, влияние внешнего воздействия. При увеличении амплитуды внешнего воздействия кривая 1 на рис. 1, а поднимается вверх и при некотором значении амплитуды занимает положение 2, расстройка α_1 при этом положительна при любых частотах генератора. Вторая гармоника существует только в области частот от p_7 до p_8 (единственное решение, соответствующее знаку минус в уравнении (15)). Амплитудно-частотная характеристика имеет вид плавной кривой без скачков (рис. 1, a). Увеличение затухания приводит к сужению областей возбуждения, а при некотором δ область возбуждения стягивается в точку (рис. 1, a). Ограничение зоны сверху определяется расстроечным механизмом [6] и проявляется в тем большей степени, чем больше затухание.

Экспериментальное исследование

Исследовалось возбуждение второй гармоники в контуре с нелинейной индуктивностью, выполненной в виде катушки с ферритовым









сердечником с $\mu = 2000$. Кривая, проходящая через вершины петель гистерезиса, аппроксимировалась двучленом $i = 0,289 + 10^{-6} \phi^5$, ток измерялся в мвб, поток в $C = 1,15 \mu F$, изохронная частота контура $f \sim 100 \ \text{гц}$. При питании контура от сети $f = 50 \ \text{гц}$ с увеличением э.д.с. наблюдается несколько последовательно возникающих дискретных зон возбуждения четных гармоник (осциллограммы и спектры трех низших показаны на рис. 2). Проведенный выше расчет сопоставим количе-

ственно лишь с первой зоной, где высшие гармоники (3-я, 4-я, 5-я и т. д.) слабо выражены и ток близок к гармоническому.

На рис. З показаны экспериментальные амплитудно-частотные характеристики второй гармоники для первой зоны возбуждения U= =10,6 в при двух различных затуханиях. На рис. 4 показаны расчетные характеристики. Сопоставление эксперимента с расчетом показывает, что расчет дает правильную оценку амплитуды и полосы частот возбуждения второй гармоники.

В заключение следует сказать следующее.

Проведено исследование параметрического механизма возбуждения четных гармоник в резонансном контуре с нечетной нелинейностью, образованной нелинейной индуктивностью без подмагничивания.

При расчете условий возбуждения второй гармоники существенным является использование полинома пятой степени для описания зависимости тока от потока в нелинейной индуктивности. Несмотря на то что член пятой степени в приближении малой нелинейности имеет меньшую интенсивность, чем кубический член, он более эффективно возбуждает вторую гармонику, поскольку параметрическое возбуждение происходит в первой зоне Матье.

Полоса частот возбуждения второй гармоники сдвинута относительно половины изохронной частоты контура $\omega_0/2$ на конечную величину, зависящую от амплитуды внешнего воздействия.

Уже нулевое приближение дает правильную оценку амплитуды и зоны возбуждения второй гармоники.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карасев М. Д., Смирнова Е. Ю. «Вести. Моск. ун-та», физ., астрон., 13, 250, 1972.

2. Dasarathy B. V. Proc. IEEE, 58, 602, 1970.

3. Малкин И. Г. Некоторые задачи нелинейной теории колебаний. М., 1956.

4. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М., 1968.
5. Науshi Т. Journal of Franklin Inst., 281, 379, 1966.
6. Каплан А. Е., Кравцов Ю. А., Рылов В. А. Параметрические генераторы и делители частоты. М., 1956.

Поступила в редакцию 30.3 1973 г.

Кафедра физики колебаний