Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1974

УДК 621.315.592

В. Л. БОНЧ-БРУЕВИЧ, А. Г. МИРОНОВ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ТРАЕКТОРИЯМ В ЗАДАЧЕ ОБ ЭЛЕКТРОНЕ В СЛУЧАЙНОМ ПОЛЕ

Методом континуального интегрирования Фейнмана рассмотрена задача об электроне в случайное поле. Выяснены области применимости различных приближений. Вычислены функции Грина и плотность состояний с квантовыми поправками.

Введение

Задача о вычислении плотности электронных состояний в случайном поле неоднократно служила предметом исследования. Конкретные точные результаты, однако, удалось получить лишь в нескольких предельных случаях или для очень упрощенных моделей (случайная одномерная цепочка δ-функций). В связи с этим представляют интерес классификация возможных предельных случаев, допускающих аналитическое решение, и установление пределов их применимости, а также запись выражения для плотности состояний в форме, допускающей непосредственный расчет на ЭВМ. Эти две задачи рассматриваются в настоящей работе. Для решения их удобно иметь хотя бы формально замкнутое выражение для плотности состояний. Соответственно мы воспользуемся представлением Фейнмана для функции Грина [1, 2], выполняя усреднение по случайному полю под знаком континуального интеграла[1]. Будем рассматривать формально одноэлектронную задачу, принимая во внимание межэлектронное взаимодействие (в случае необходимости) только через экранирование кулоновского потенциала; радиус экранирования будем считать заданным феноменологически.

Пусть рассматриваемая система в среднем макроскопически однородна и изотропна. Тогда случайный потенциал $V(\mathbf{r})$ можно нормировать условием $\langle V(\mathbf{r})\rangle = 0$ (угловые скобки обозначают усреднение по случайному полю). Имея в виду в основном методические цели, мы можем ограничиться рассмотрением гауссова случайного поля, когда вероятность реализации функции $V(\mathbf{r})$ есть

$$P[V(\mathbf{r})] = \mathfrak{N} \exp\left\{-\frac{1}{2}\int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' V(\mathbf{r}) B(\mathbf{r}-\mathbf{r}') V(\mathbf{r}').\right\}. \qquad (1)$$

[1] Такой прием неоднократно использовался разными авторами (см., например, [3—6]).

Здесь $\mathfrak{N}$ — нормировочный множитель $B(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ — положительно определенное ядро, просто связанное с парной корреляционной функцией $\Psi(\mathbf{r})$:

$$\Psi(R) = \langle V(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}+\mathbf{R})\rangle, \quad \int B(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')\,d\mathbf{r}' = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}''). \tag{2}$$

Функция Ψ представляет собой в данном случае единственную независимую характеристику поля [1]. Мы будем считать, что ее пространственное изменение характеризуется одной независимой длиной, α^{-1}; соответственно функция $\Psi(\mathbf{r})$ — монотонно убывающая.

Согласно [1, 2] запаздывающая антикоммутаторная функция Грина $G_r(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t)$ для электрона в поле $V(\mathbf{r})$ имеет вид

$$G_r(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \frac{i\theta(t)}{N}(2\pi i t)^{-3/2}\int D[\mathbf{r}(\tau)]\exp\left\{Q_k[\mathbf{r}(\tau)] - i\int_0^t V[\mathbf{r}(\tau)]\,d\tau\right\}. \tag{3}$$

Здесь $\theta(t)$ — ступенчатая функция, символ $\int D[\mathbf{r}(\tau)]$ обозначает интегрирование по траекториям, удовлетворяющим условиям $\mathbf{r}(0)=\mathbf{r}$, $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}'$, множитель N определяется нормировочным условием

$$N = \int D[\mathbf{r}(\tau)]\exp Q_k[\mathbf{r}(\tau)], \tag{4}$$

и $(-iQ_k)$ есть кинетическая часть классического действия:

$$Q_k[\mathbf{r}(\tau)] = \frac{i}{2}\int_0^t \dot{\mathbf{r}}^2(\tau)\,d\tau, \quad \dot{\mathbf{r}}(\tau) = d\mathbf{r}(\tau)/d\tau \tag{5}$$

(использована система единиц, в которой $\hbar=m=1$). Принят простейший закон дисперсии электрона, начало отсчета энергии совмещено с дном разрешенной зоны, которая была бы в отсутствие случайного поля. Плотность состояний дается известным выражением через Фурье-образ по времени усредненной функции Грина:

$$\rho(E) = (2/\Omega)\,\mathrm{Sp}\,\langle Im\,G_r(E)\rangle, \tag{6}$$

где Ω — объем системы и

$$\langle G_r(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dt e^{iEt}\langle G_r(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t)\rangle. \tag{7}$$

Поскольку усредненная функция Грина зависит лишь от модуля разности координат, мы можем положить в (7) $\mathbf{r}=\mathbf{r}'=0$ и не выписывать в дальнейшем эти аргументы [2]. Считая далее G_r единичной спиновой матрицей, имеем

---

[1] Именно в этом и состоит серьезное упрощение задачи, связанное с использованием гауссова поля. Заметим, однако, что развиваемый ниже метод переносится с очевидными усложнениями и на случайные поля другой природы. Отметим также, что задача с гауссовым полем представляет не только чисто методический, но и самостоятельный физический интерес. Так, она возникает в теории сильно легированных полупроводников (в определенной области энергий), при исследовании поведения носителей заряда в поле длинных звуковых волн со случайными фазами [7] и др.

[2] Как известно, при нахождении Фурье-образа по времени от функции Грина при совпадающих пространственных аргументах следует брать конечную часть интеграла в смысле Адамара.

$$\rho(E) = 4\langle Im\, G_r(E)\rangle. \tag{8}$$

Результат усреднения экспоненциального функционала от $V(\mathbf{r})$ по гауссову распределению хорошо известен:

$$\langle G_r(t)\rangle = \frac{i\theta(t)}{N}(2\pi i t)^{-3/2}\oint D[\mathbf{r}(\tau)]\exp Q[\mathbf{r}(\tau)], \tag{9}$$

где символ $\Phi D[\mathbf{r}]$ означает, что интегрирование ведется лишь по замкнутым траекториям, $\mathbf{r}(0)=\mathbf{r}(t)=0$, $Q=Q_k+Q_n$,

$$Q_n = -\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_0^t d\tau'\,\Psi(|\mathbf{r}(\tau)-\mathbf{r}(\tau')|). \tag{10}$$

Замкнутые непрерывные траектории удобно задавать рядами Фурье:

$$\mathbf{r}(\tau) = \sum_{n=0}^{M}[\mathbf{a}_n\cos(2\pi n\tau/t) + \mathbf{b}_n\sin(2\pi n\tau/t)], \tag{11}$$

причем $\mathbf{a}_0 = -\sum_{n=1}^{M}\mathbf{a}_n$. В силу непрерывности траекторий $\mathbf{r}(\tau)$ коэффициенты $\mathbf{a}_n$ и $\mathbf{b}_n$ убывают при $n\to\infty$ не медленнее, чем $1/n$. При такой параметризации семейства траекторий переменными интегрирования служат коэффициенты $\mathbf{a}_n$, $\mathbf{b}_n$. Континуальный интеграл понимается как предельное значение при $M\to\infty$ $6M$-мерного интеграла с нормировочным множителем

$$N_M = \prod_{n=1}^{M}(it/\pi n^2)^3. \tag{12}$$

При этом

$$Q_k = \sum_{n=1}^{M}[(i\pi^2 n^2/t)(\mathbf{a}_n^2 + \mathbf{b}_n^2)], \tag{13}$$

$$Q_n = -(1/2)\psi_1 A, \quad \psi_1 \equiv \Psi(0) = \langle V^2\rangle (<\infty), \tag{14}$$

$$A = (2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{2\pi} d\varphi'\,\widetilde{\Psi}(z), \quad \widetilde{\Psi} = \Psi/\psi_1, \tag{15}$$

$$z = \alpha\left|\sum_{n\geqslant 1}[\mathbf{a}_n(\cos n\varphi - \cos n\varphi') + \mathbf{b}_n(\sin n\varphi - \sin n\varphi')]\right|. \tag{16}$$

По определению, $A\leqslant 1$, $\widetilde{\Psi}(0)=1$, $\widetilde{\Psi}(\infty)=0$. Будем считать также, что

$$\int_0^\infty \widetilde{\Psi}(z)\,dz \equiv c < \infty. \tag{17}$$

§ 1. Предельные случаи

При определенных условиях оказывается возможным выделить некоторый узкий класс «существенных» траекторий. Для этой цели заметим, что функционал Q характеризуется двумя независимыми параметрами:

$$\lambda_1 = \psi_1 t^2, \quad \lambda_2 = \alpha\sqrt{t}. \tag{18}$$

Удобно ввести еще их комбинацию

$$\lambda_3 = \lambda_2^4/\lambda_1 = \alpha^4/\psi_1 \tag{19}$$

и характерное время t_c[1]:

$$t_c = (\psi_1\alpha^2)^{-1/3}, \quad t/t_c = (\lambda_1\lambda_2^2)^{1/3}. \tag{20}$$

Можно выделить следующие предельные случаи.

1. $\lambda_2 \ll 1$, $\lambda_1\lambda_2 \ll 1$. При немалом λ_1 это возможно для $t \ll t_c$ при $\lambda_3 \ll 1$. В данном случае для всех существенных траекторий аргумент функций $\Psi(|\mathbf{r}(\tau)-\mathbf{r}(\tau')|)$ близок к нулю. Пренебрегая малым отличием $\Psi(r)$ от ψ_1, получим известное [8] классическое приближение, а учитывая это отличие по теории возмущений, получим квазиклассические поправки.

2. $\lambda_1 \gg 1$, $t_c \ll t$. Это — случай «больших времен». Для большинства траекторий аргумент функции Ψ велик почти для всех τ и τ'. Если одновременно с указанными условиями осуществляется неравенство $\lambda_2 \ll 1$ (что возможно при $\lambda_3 \ll 1$), то важны лишь траектории, близкие к «точкам стационарности» функционала Q; функциональное интегрирование при этом можно выполнить по методу перевала. (Седловая точка определяет основную временную зависимость $G_r(t)$ и при отказе от условия $t_c \ll t$, однако вычислить функциональный интеграл при этом труднее.)

3. $\lambda_1\lambda_2 \ll n_0$, $\lambda_2 \ll n_0$, где n_0 — некоторое целое число. При этом в аргументе функции Ψ можно отбросить гармоники ряда (11) с номерами, большими n_0. Этот случай можно назвать конечномодовым. Интегралы по высшим ($n > n_0$) гармоникам здесь берутся тривиально, а остающийся $6n_0$-мерный интеграл может быть вычислен на ЭВМ стандартными методами [9].

4. $\lambda_2 \gg 1$, λ_1 — произвольно. Эту ситуацию можно назвать локальной. Действительно, для несамопересекающихся траекторий функционал Q_n при этом сводится к следующему:

$$Q_n \approx -\frac{\psi_1 c}{\alpha}\int_0^t \frac{d\tau}{|\dot{\mathbf{r}}(\tau)|}. \tag{21}$$

Не менее важными, однако, оказываются, по-видимому, и траектории с самопересечениями. Поэтому здесь трудно выделить достаточно узкий класс существенных траекторий. Этот локальный случай соответствует хорошо изученной иным методом задаче о хаотическом распределении примесных центров с предельно коротко действующим потенциалом [10, 11].

Нетрудно установить вид основной временной зависимости функции Грина в случаях 1 и 2.

Рассмотрим сначала случай больших времен, $t > t_c$. Легко показать (см. § 2), что оптимальны круговые траектории, проходящие через точку $\mathbf{r}=0$ и произвольно ориентированные в пространстве. При данном радиусе круга R все эти траектории эквивалентны. По этой причине достаточно исследовать функционал Q на одной из них, $\xi(\tau)$. Положим

$$\xi(\tau) = \mathbf{a}_1[\cos(2\pi\tau/t) - 1] + \mathbf{b}_1 \sin(2\pi\tau/t), \quad \mathbf{a}_1^2 = \mathbf{b}_1^2 = R^2, \quad (\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1) = 0. \tag{22}$$

[1] При переходе к обычным единицам α^2 надо заменить на $\alpha^2\hbar^2/m$.

Получим

$$Q(R) = 2\pi^2 iR^2/t - (\psi_1 t^2/\pi) F(2\alpha R), \tag{23}$$

где

$$F(\varkappa) = \int\limits_0^{\pi/2} dy\, \widetilde{\Psi}(\varkappa \sin y). \tag{24}$$

Радиус R фактически есть одна из переменных континуального интегрирования, и имеет смысл найти точку стационарности функции $\exp Q(R)$ из уравнения

$$\frac{4\pi^2 iR_0}{t} - \frac{2\psi_1 t^2 \alpha}{\pi} \frac{dF(\varkappa)}{d\varkappa}\bigg|_{\varkappa=2\alpha R_0} = 0. \tag{25}$$

При $|\varkappa| \gg 1$ и $\operatorname{Re}\varkappa > 0$ имеем (см. (17)) $F(\varkappa) \approx c/\varkappa$ и

$$R_0 = (ic)^{1/3} (2\pi\alpha)^{-1} (t/t_c). \tag{26}$$

Метод перевала применим, когда существенна лишь малая окрестность точки R_0, размеры которой порядка $(|d^2Q/dR^2|_{R=R_0})^{-1/2}$ должны быть значительно меньше R_0. Мы имеем:

$$\left| R_0^2 \frac{d^2Q}{dR^2}\bigg|_{R=R_0} \right| \sim |R_0^2/t| \sim \lambda_1^{1/2} \lambda_3^{-1/6} \gg 1, \tag{27}$$

так что седло по переменной R крутое. При этом основная временна́я зависимость функции Грина дается значением $\exp Q(R)$ в седловой точке:

$$G_r(t) \sim \exp Q(R_0) = \exp\left\{-\frac{3}{2} e^{-i\pi/6} (t/t_c)\, c^{2/3} \lambda_3^{-1/3}\right\}. \tag{28}$$

Отметим, что это существенно квантовый результат (в обычных единицах $t_c^{-1} \lambda_3^{-1/3} \sim \hbar^{-2/3}$).

Аналогичные соображения применимы и при меньших временах, $t_c \leqslant t$, однако седловая точка $R_0(t)$ определяется трансцендентным уравнением (25). Считая для оценки $R_0 \sim \alpha^{-1}$ при $t \sim t_c$, находим, что седло остается достаточно крутым при условии $\alpha^2 t_c \ll 1$, т. е. $\lambda_3^{-1/3} \gg 1$.

Перейдем к случаю малых времен, $t < t_c$. По-прежнему можно формально определить точку стационарности функции $\exp Q(R)$ в комплексной плоскости R. Она лежит в области малых $|2\alpha R|$, когда для функции $F(\varkappa)$ справедливо представление $F(\varkappa) \approx \frac{\pi}{2} - c_1\varkappa$. Получим

$$R_0(t) = (ic_1/4\pi^3\alpha)(t/t_c)^3. \tag{29}$$

Однако седло при этом оказывается очень пологим, и для всех траекторий в его окрестности функционал $Q_n[\mathbf{r}(\tau)]$ мало отличается от величины $-\psi_1 t^2/2$. Вместо метода перевала здесь годится простое разложение экспоненты по соответствующей разности. Таким образом, основная временна́я зависимость $G_r(t)$ в данном случае определяется классическим выражением

$$G_r(t) \sim \exp\{-\psi_1 t^2/2\}. \tag{30}$$

Условия применимости (30) при расчете плотности состояний указываются ниже (неравенства (33), (35)).

§ 2. Вычисление интеграла по траекториям. Плотность состояний

При явном расчете $G_r(t)$ целесообразно задать конкретный вид функции $\Psi(r)$. Возьмем ее в простом виде $\Psi(r)=\psi_1\exp(-\alpha r)$. Это выражение удовлетворяет условиям, принятым во введении (при этом $c=c_1=1$). Корреляционная функция такого вида возникает, например, в задаче о сильно легированном полупроводнике с некоррелированным распределением примеси в кристалле. Тогда роль характерной длины, α^{-1}, играет радиус экранирования и $\psi_1=2\pi n_t e^4/\varepsilon^2\alpha$, где n_t — эффективная концентрация примеси. Будем для простоты считать, что $\lambda_3\equiv\equiv(\alpha^4/\psi_1)\ll 1$. Это соответствует обычному условию сильного легирования в полупроводнике.

Рассмотрим сначала малые времена, $t\ll t_c$. Тогда

$$G_r(t)=G_r^{(0)}(t)\exp(-\psi_1 t^2/2)\left\{1+\psi_1 t^2/2)-\right.$$

$$\left.-\frac{\psi_1}{2N}\oint D[\mathbf{r}(\tau)]\exp Q_k[\mathbf{r}(\tau)]\int_0^t d\tau\int_0^t d\tau'\exp[-\alpha|\mathbf{r}(\tau)-\mathbf{r}(\tau')|]\right\},\quad (31)$$

где $G_r^{(0)}(t)=i\theta(t)(2\pi it)^{-3/2}$. Фигурирующий здесь континуальный интеграл легко вычисляется, и мы находим

$$G_r(t)=G_r^{(0)}(t)\exp\left(-\frac{\psi_1 t^2}{2}\right)\left\{1+\frac{\psi_1 t^2}{2}\sqrt{\frac{\pi}{8}i\alpha^2 t}\left[1-\Phi\left(\sqrt{\frac{\pi}{8}i\alpha^2 t}\right)\right]\right\}.\quad (32)$$

где

$$\Phi(y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\exp(-x^2)\,dx.$$

Квантовая поправка к единице мала: $\sim(t/t_c)^{5/2}\lambda_3^{-1/6}$.

Теперь можно получить выражение для плотности состояний, отбросив пока оцениваемый нижей вклад от области $t\geqslant t_c$. При малых энергиях, удовлетворяющих условию

$$|E|\ll\psi_1^{1/2},\quad (33)$$

основную роль в интеграле в правой части (7) играют значения $t\leqslant\psi_1^{-1/2}$. Соответственно мы получаем (в обычных единицах)

$$\rho(E)=\frac{\Gamma(3/4)\,m^{3/2}\psi_1^{1/4}}{2^{1/4}\pi^{5/2}\hbar^3}\left\{1+\frac{\Gamma(1/4)}{2^{3/2}\Gamma(3/4)}\frac{E}{\psi_1^{1/2}}+\frac{2^{3/4}\pi}{16\Gamma(3/4)}\frac{E\alpha\hbar}{m^{1/2}\psi_1^{3/4}}\right\}.\quad (34)$$

Первые два слагаемых в фигурных скобках представляют собой известный результат квазиклассического приближения, впервые полученный в [12]; последнее слагаемое описывает квантовую поправку к плотности состояний. Аналогичная поправка была вычислена в работе [13].

В случае больших отрицательных энергий $E<0$, $|E|\gg\psi_1^{1/2}$, выражение (31) можно использовать лишь при

$$1\ll E^2/\psi_1\ll\lambda_3^{-1/5}.\quad (35)$$

Результат для плотности состояний в этом случае таков:

$$\rho(E) = e^{-E^2/2\psi_1} \frac{\psi_1}{2\pi^2 |E|^{3/2}} \left\{ 1 + \frac{\alpha E \sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}\,\psi_2^{3/4}} - \frac{\alpha^2 |E|^{3/2}}{4\psi_1^{5/4}} \right\}. \tag{36}$$

Второе и третье слагаемые в фигурных скобках определяют квантовые поправки к хорошо известному классическому результату.

Обратимся к случаю больших времен, $t \gg t_c$. Прежде всего покажем, что круговая орбита (22) радиуса $R_0(t)$ действительно есть точка стационарности функционала $Q[\mathbf{r}(\tau)]$. Прямым варьированием Q находим

$$\frac{\delta Q\,]\mathbf{r}(\tau)]}{\delta \mathbf{r}(\tau)}\Bigg|_{\mathbf{r}(\tau)=\xi(\tau)} = [\xi(\tau) - \mathbf{a}_0[\left\{ (2\pi)^2 \frac{i}{t} - \frac{2\psi_1 t\alpha}{P_0\pi} \frac{dE(\varkappa)}{d\varkappa}\Bigg|_{\varkappa=2\alpha R_0} \right\}. \tag{37}$$

Приравнивая нулю эту вариацию, приходим к уравнению (25), причем:

$$F(\varkappa) = \int_0^{\pi/2} dy \exp(-\varkappa \sin y). \tag{38}$$

Заметим, что нелинейное интегральное уравнение для определения траекторий точек стационарности функционала $Q[\mathbf{r}(\tau)]$ может иметь и другие решения. Однако они по соображениям симметрии должны быть простой геометрической формы, и легко проверить, что вклад от них пренебрежимо мал по сравнению с рассматриваемым.

Тривиальное вырождение по ориентациям круговых орбит легко учесть, должным образом выбрав переменные интегрирования в пространстве первых гармоник a_1, b_1. Далее надо составить вторую вариацию функционала Q вблизи круговой орбиты радиуса и вычислить возникающий при этом гауссов континуальный интеграл. В результате получаем

$$G_r(t) = G_r^{[0)}(t)\, B \left(\frac{t_c}{t}\right)^{9/2} \lambda_3^{-1/3} \exp\left\{ -\frac{3t_c}{2t} \lambda_3^{-1/3} e^{-i\pi/6} (1+b) \right\}, \tag{39}$$

$$b = -\frac{2}{3\pi} e^{i\pi/3} \lambda_3^{1/3} \left(2\nu - \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right), \tag{40}$$

$$\nu = -\frac{1}{2} \int_0^\infty dx \ln[1 - x^{-2} \ln(1+x^2)]. \tag{41}$$

Здесь B — численная постоянная, не содержащая параметров, число ν положительно и близко к двум.

Строго говоря, выражения (32) и (39) справедливы в неперемежающихся интервалах t. Однако в пренебрежении малыми поправками они гладко сшиваются при

$$t = t_0 \equiv (3t_c/2) \exp(-i\pi/6), \tag{42}$$

т. е. вблизи естественной границы раздела областей применимости асимптотик. Это позволяет вычислять $G_r(E)$, интегрируя в плоскости t по контуру, идущему из нуля в точку t_0, а от нее к ∞. Область больших времен дает при этом следующий вклад в плотность состояний при $|E| \ll \psi_1^{1/2}$:

$$\Delta\rho(E) = (4\pi^3 t_c)^{-1/2} \exp(-9/16\lambda_3^{1/3}) \times \tag{43}$$

$$\times \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{5/2} \lambda_3^{1/3} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{9\sqrt{3}}{16}\lambda_3^{1/3}\right) - E t_c \lambda^{1/2} \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \cos\left(\frac{9\sqrt{3}}{16}\lambda_3^{1/3}\right) \right\}.$$

Эта поправка экспоненциально мала по сравнению с фигурирующими в (34), что и оправдывает квазиклассическое приближение в рассматриваемых условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feynman R. P. Rev. Mod. Phys., **20**, 367, 371, 1948.
2. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М., 1968.
3. Edwards S. F., Gulyaev Yu. V. Proc. Phys. Soc., **83**, 495, 1964.
4. Чаплик А. В. ЖЭТФ, **53**, 1371, 1967.
5. Андреев И. В. ЖЭТФ, **48**, 1437, 1965.
6. Сурис Р. А. «Физика твердого тела», **5**, 458, 1963.
7. Burtsev E. V. Phys. Stat. Sol., **51**, 941, 1972.
8. Бонч-Бруевич В. Л. Вопросы электронной теории сильно легированных полупроводников. М., 1965.
9. Гельфанд И. М., Фролов А. С., Ченцов Н. Н. «Изв. вузов», математика, № 5(6), 32, 1958.
10. Лифшиц И. М. ЖЭТФ, **53**, 743, 1967.
11. Zittartz J., Langer J. S. Phys. Rev., **148**, 741, 1966.
12. Бонч-Бруевич В. Л. «Физика твердого тела», **4**, 2660, 1962.
13. Эфрос А. Л. ЖЭТФ, **59**, 880, 1970.

Поступила в редакцию
11.4.1973 г.

Кафедра
физики полупроводников