Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1974

УДК 530.12

В. Н. ПОНОМАРЕВ

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ С КРУЧЕНИЕМ

Рассмотрен простой нетривиальный пример пространства-времени с кручением, а именно изотропный и однородный мир. Показано, что эффект кручения есть эффект типа кривизны.

В последние годы возрос интерес к одному из обобщений эйнштейновской теории гравитации, а именно теории Эйнштейна — Картана [1—4]. Новым шагом в понимании структуры этой теории явилась работа А. Траутмана [5]. Кроме того, важно, что центр тяжести исследований от общих вопросов теории переместился к ее приложениям [6—8].

Мы рассмотрим простой нетривиальный пример пространства-времени с кручением. Как известно, в теории Эйнштейна — Картана в качестве модели пространства-времени берется четырехмерное многообразие с метрическим тензором g_{ij} и метрической несимметричной связностью Γ^i_{jk} (постулат метричности $Dg_{ij}=0$, где D — внешняя ковариантная производная).

Итак, пусть M — 4-мерное дифференциальное многообразие класса C^∞; $\{\mathbf{h}_i\}$ — система четырех гладких векторов-реперов, образующая базис касательного пространства T к многообразию в некоторой окрестности U точки $p\in M$; $\{\theta^i\}$ — система 1-форм, образующая базис кокасательного пространства T^*, дуальный базису $\{\mathbf{h}_i\}$. Аффинная (метрическая) связность относительно θ^i — 1-формы $\omega^i{}_j$, определяющая ковариантную производную

$$\omega^i{}_j = \Gamma^i{}_{jk\wedge}\,\theta^k, \tag{1}$$

$\Gamma^k{}_{ij}\neq\Gamma^k_{ji}$ — коэффициенты связности. Вводится 2-форма кривизны

$$\Omega^i{}_j = d\omega^i{}_j + \omega^i{}_{k\wedge}\,\omega^k{}_j \equiv \frac{1}{2} B^i{}_{jkl}\,\theta^k{}_\wedge\,\theta^l, \tag{2}$$

$B^i{}_{jkl}$ — тензор кривизны, 2-форма кручения определяется следующим образом:

$$\Theta^i = D\,\theta^i = \frac{1}{2} Q^i{}_{kl}\,\theta^k{}_\wedge\,\theta^l, \tag{3}$$

$Q^i{}_{kl}$ — тензор кручения. Поскольку наше многообразие имеет метрический тензор g_{ij}, то мы можем ввести полностью антисимметричный псевдотензор η_{ijkl} ($\eta_{1234} = \sqrt{\cdot \| g_{ij} \|}$), а вместе с ним

$$\eta_{ijk} = \theta^l{}_\Lambda \eta_{ijkl}, \quad \eta_{ij} = \frac{1}{3} \theta^k{}_\Lambda \eta_{ijk},$$

$$\eta_i = \frac{1}{4} \theta^j{}_\Lambda \eta_{ij}, \quad \eta = \theta^i{}_\Lambda \eta_i.$$

Для нахождения уравнений, определяющих гравитационное поле, необходимо определить действие этого поля. Уравнения получаются путем варьирования суммы действий поля и материальных частиц.

В качестве лагранжиана гравитационного поля выбирается 4-форма, независимая от выбора координат θ^i, а поэтому определенная на всем дифференцируемом многообразии:

$$L_g = L_g(\omega^i{}_j, \theta^i, g_{ij}) = \frac{1}{16\pi} \eta^i{}_{j\Lambda} \Omega^j{}_i,$$

$$\delta L_g = \frac{1}{16\pi} E^{ij}{}_\Lambda \delta g_{ij} + \frac{1}{8\pi} l_{i\Lambda} \delta\theta^i + \frac{1}{16\pi} c_i{}^j{}_\Lambda \delta\omega^i{}_j + d(\quad),$$

где

$$E^{ij} = \frac{1}{2} (g^{ij} \eta_l{}^k - g^{ik} \eta^j{}_l - g^{jk} \eta^i{}_l)_\Lambda \eta^k{}_l,$$

$$l^i = \frac{1}{2} \eta^{ijk}{}_\Lambda \Omega_{jk},$$

$$c_i{}^j = -D\eta_i{}^j, \tag{4}$$

4-форма лагранжа материи $L_m = L_m(g_{ij}, \theta^i, \omega_{ij}, \varphi_a)$ (φ_a — физические поля):

$$\delta L_m = \frac{1}{2} T^{ij}{}_\Lambda \delta g_{ij} + t_{i\Lambda} \delta\theta^i + \frac{1}{2} S^{ij}{}_\Lambda \delta\omega_{ij} + L^a{}_\Lambda \delta\varphi_a + d(\quad),$$

где T^{ij} — 4-форма, соответствующая симметричному тензору энергии-импульса, t_i — 3-форма, соответствующая каноническому тензору энергии-импульса; $S_{ij} = -S_{ji}$; $S_{ij} = S^k_{ji} \Lambda \ \eta_k$ ($S^k{}_{ij}$ — тензор внутреннего углового момента импульса).

Из принципа наименьшего действия, считая независимыми величины (а) (g_{ij}, ω_{ij}, φ_a), (б) (θ^i, ω_{ij}, φ_a), получим две эквивалентные системы уравнений (мы пользуемся системой единиц $c=1$, $G=1$, G — гравитационная постоянная):

$$E^{ij} = 8\pi T^{ij}, \quad C_{ij} = 8\pi S_{ij}, \quad L^a = 0, \tag{а}$$

$$l_i = 8\pi t_i, \quad C_{ij} = 8\pi S_{ij}, \quad L^a = 0. \tag{б}$$

Первые уравнения в системах (а) и (б) являются обобщенными уравнениями поля Эйнштейна. Вторые — уравнения Картана — показывают, что тензор кручения связан с внутренним угловым моментом импульса. Третьи — являются уравнениями движения материи.

Из определения (4) и общих тождеств Бианки, $D\Omega^i{}_j = 0$ следуют свернутые тождества Бианки

$$Dl_i = \frac{1}{2} \eta_{ijkl} \Theta^l{}_\Lambda \Omega^{jk}. \tag{5}$$

Из уравнений поля (6) и тождества (5) следует закон сохранения (см. [5]):

$$Dt_j = Q^k{}_{ji}\, \theta^i{}_\Lambda\, t^{\cdot}{}_k - \frac{1}{2} B^{kl}{}_{ji}\, \theta^i{}_\Lambda\, S_{kl}. \tag{6}$$

После этих общих исследований переходим к нашей модели. Будем предполагать однородное и изотропное распределение вещества по пространству. Метрику задаем в виде

$$ds^2 = g_{ij}\, \theta^i \otimes \theta^j = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2) - (\theta^3)^2,$$

$$\theta_0 = \theta^0 = d\tau; \quad - \theta_1 = \theta^1 = b(\tau)\, dx\, \theta^1,$$

$$- \theta_2 = \theta^2 = b(\tau)\, dy; \quad - \theta_3 = \theta^3 = b(\tau)\, dz.$$

С помощью формулы $d\theta_i = -\gamma_{ij}{}_\Lambda\, \theta^j$, где $\gamma^i{}_j = \{{}^i{}_{jk}\}_\Lambda\, \theta^k$ ($\{{}^i{}_{jk}\}$ — символы Кристоффеля), вычисляем γ_{ij}, а затем и $\{{}^i{}_{jk}\}$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 11 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 22 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 33 \end{Bmatrix} = \dot b(\tau)\; b(\tau),$$

$$\begin{Bmatrix} a \\ 0\, b \end{Bmatrix} = \frac{\dot b(\tau)}{b(\tau)}\, \delta^a_b, \tag{7}$$

где

$$\dot b(\tau) = \frac{db(\tau)}{d\tau}, \quad a,\ b = 1, 2, 3.$$

Остальные символы Кристоффеля равны нулю.

Не равные нулю компоненты тензора Риччи:

$$R_{00} = -3\, \frac{\ddot b(\tau)}{b(\tau)}, \; R_{11} = R_{22} = R_{33} = b(\tau)\, \ddot b(\tau) + 2\, \dot b(\tau)]^2,$$

$$\ddot b(\tau) = \frac{d^2 b(\tau)}{d\tau^2}.$$

Скаляр Риччи:

$$R = -6 \left(\frac{\ddot b(\tau)}{b(\tau)} + \frac{[\dot b(\tau)]^2}{b^2(\tau)} \right).$$

Введем теперь кручения следующим образом. Пусть наша метрическая аффинная связность имеет вид

$$\omega_{ij} = \gamma_{ij} + A(\tau)\, L\, \eta_{ij},$$

где $A(\tau) = a(\tau)\, \dfrac{\partial}{\partial\tau}$, тогда кручение такой связности равно (2)

$$\Theta^i = d\theta^i + \omega^i{}_{j\Lambda}\, \theta^j = (d\theta^i + \gamma^i{}_{j\Lambda}\, \theta^j) + (A\, L\, \eta^i{}_j)_\Lambda\, \theta^j =$$

$$= A(\eta^i{}_{j\Lambda}\, \theta^j) - \eta^i{}_{j\Lambda} \cdot (A\, L\, \theta^j) = -a(\tau)\, \eta^i_0,$$

$$\Theta^0 = 0; \; - \Theta^a = \frac{1}{2}\, a(\tau) \in_{abc} \theta^b{}_\Lambda\, \theta^c. \tag{8}$$

В тензорном обозначении это соответствует выбору кручения в виде псевдоследа

$$\check{Q}_i = \frac{1}{3!} \in_{iklm} Q^{klm} = \left(\frac{1}{2} a, 0, 0, 0\right),$$

3-форма $\bar{l}_i = -\frac{1}{2} \in_{ijkl} \overline{\Omega}^{jk}{}_\Lambda \theta^l$ (где $\overline{\Omega}_{ij}$ определяется формулой (2), а ω_{ij} формулой (1)) равна

$$\bar{l}_0 = l_0 - \frac{3}{4} a^2 \theta^1{}_\Lambda \theta^2{}_\Lambda \theta^3,$$

$$\bar{l}_2 = l_2 - \frac{1}{4} a^2 \theta^1{}_\Lambda \theta^3{}_\Lambda \theta^0;$$

$$\bar{l}_1 = l_1 - \frac{1}{4} a^2 \theta^3{}_\Lambda \theta^2{}_\Lambda \theta^1;$$

$$\bar{l}_3 = l_3 - \frac{1}{4} a^2 \theta^2{}_\Lambda \theta^1{}_\Lambda \theta^0;$$

где

$$l_i = -\frac{1}{2} \in_{ijkl} \Omega^{jk}{}_\Lambda \theta^l = G_i{}^j \eta_j$$

($G^i{}_j$ — тензор Эйнштейна),

$$\Omega^i{}_j = d\gamma^i{}_j + \gamma^i{}_{k\Lambda} \gamma^k{}_j = \frac{1}{2} R^i{}_{jkl} \theta^k{}_\Lambda \theta^l$$

($R^i{}_{jkl}$ — тензор Римана).

Симметризованный тензор Эйнштейна — Картана $G_{(ij)}$, $E_{(ij)} = \overline{G}_{(ij)} \eta$ в случае, когда у тензора кручения не равна нулю только псевдоследовая часть, имеет вид

$$\overline{G}_i^j = G_{ij} + \delta_i^j \check{Q}^k \check{Q}_k + 2\check{Q}^j Q_i.$$

Чтобы не нарушалась изотропия и однородность пространства, $\overline{G}_{ab} \equiv 0$; $\overline{G}_{0a} \equiv 0$ $(a, b = 1, 2, 3, a \neq b)$, $\check{Q}^i$ должно быть единственно функцией t и иметь не равной нулю только один компонент, т. е. с необходимостью приходим к выбору формы кручения (8).

Уравнения Картана (в тензорной форме $\check{Q}^i = 8\pi S^i$) при сделанных предположениях о Θ^i сведутся к уравнению

$$\frac{1}{2} a(t) = 8\pi S(t),$$

где

$$S^i = (S(t), 0, 0, 0). \tag{9}$$

В качестве симметричного тензора энергии-импульса выбираем тензор идеальной материи

$$\tau^j{}_i = [\rho + p(\rho)] u^j u_i + p(\rho) \delta_i^j,$$

$T^{ij} = \tau^{ij}\eta$, где ρ — плотность массы материи, $p(\rho)$ — давление, $u^i = (1, 0, 0, 0)$. Для описания состояния Вселенной будем пользоваться уравнением состояния $p(\rho) = \frac{\rho}{3}$, случаем наибольшего возможного давления при заданной плотности массы (или энергии) (в нашей системе единиц $\rho = \varepsilon$, ε — плотность энергии).

Запишем нулевую компоненту уравнений поля

$$3\dot{b}^2(t)\,[b(t)]^{-2} - 3\widetilde{S}^2(t) = 8\pi\rho(t), \tag{10}$$

где $\widetilde{S}(t) = 8\pi S(t)$.

Из тождества (5), закона сохранения (6) и равенства (9), при $\nabla_j \overline{G}^{ij} = \overline{G}^{ij}{}_{;j}$ (где ∇ — ковариантная производная относительно $\Gamma^i{}_{kl}$, точка с запятой обозначает ковариантную производную относительно символов Кристоффеля, определенных в (7а)), получим

$$\tau^i{}_{0;i} = 16\,\pi\,[u^i \breve{S}^k S_{k;i} + u^i S_i \breve{S}^k{}_{;k} + u^i \breve{S}^k \breve{S}_{i;k}].$$

Поскольку в нашей теории нет дифференциального уравнения на кручение (уравнения Картана являются алгебраическими уравнениями), то мы вынуждены постулировать дополнительные уравнения. В качестве разумного с физической точки зрения условия может быть требование сохранения массы $\tau^i{}_{0;i} = 0$, которое приводит к

$$\rho\, b^4(t) = \rho_0 \equiv \mathrm{const}, \tag{11}$$

ρ_0 — постоянная интегрирования.

Тогда уравнение на кручение примет вид

$$\dot{S}(t) = -\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}\,S(t). \tag{12}$$

Решение уравнения (12):

$$S(t) = \frac{S_0}{b(t)}, \tag{13}$$

S_0 — постоянная интегрирования. Этот результат близок к результату, полученному Р. Финкельштейном [11]. Однако он рассматривал статические пространства и требовал, чтобы кручение удовлетворяло уравнению $\nabla_i Q^k{}_{lm} = 0$. Подставляем (11) и (13) в (10), в результате получим уравнение на $b(t)$:

$$3\dot{b}^2(t)\,b^{-2}(t) - 3\widetilde{S}_0^2\,b^{-2}(t) = 8\pi\rho_0\,b^{-4}(t),$$

$$\widetilde{S}_0 = 8\pi S_0.$$

Решаем это уравнение

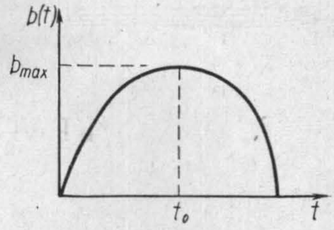
$$b(t) = \frac{1}{6S_0}\sqrt{4 - (24\pi)^2 S_0^4 (t - t_0)^2},$$

т. е. кручение создает эффект типа кривизны (см. рисунок).

В заключение отметим, что из-за связи с внутренним угловым моментом импульса кручение может влиять на сингулярности. На эту возможность указывает работа [7], где предполагается «квазиклассическое описание» спина $S^{ikl} = u^i S^{kl}$. В этом случае для изотропной и однородной модели мы получаем уравнение на $b(t)$:

$$\dot{b}^2(t)\,b^{-2} - b^{-6}(t)\cdot\mathrm{const}^2 = \frac{8\pi}{3}\,b^{-4}(t).$$

Сингулярность благодаря дополнительному члену $\frac{\mathrm{const}^2}{b^6(t)}$ (который интерпретируется как центробежная потенциальная энергия, связанная со спином) в нуле устраняется, а в бесконечности при соответствующем выборе постоянных интегрирования асимптотически переходит в решение Фридмана. Можно надеяться, что детальный анализ общих теорем Пенроуза — Хокинга (см. [9, 10]) может дать новые перспективы в изучении проблемы сингулярностей.



Выражаю благодарность проф. А. Траутману за постоянную помощь и критические замечания. Выражаю также благодарность А. Раузмайкину за полезные дискуссии и проф. Д. Иваненко за внимание к работе

ЛИТЕРАТУРА

1. Cartan E. Compt. Red., **174**, 593, 1922.
2. Kibble T. J. Math. Phys., 2, 212, 1961.
3. Фролов Б. Н. Принцип локальной инвариантности и теорема Нетер. Сб. трудов II Советской гравитационной конференции, 1965.
4. Hehl F. Ahb. Brauns. Wiss. Ges., **18**, 98, 1966.
5. Trautman A. Preprint, IFT, 72/13.
6. Ponomariev W. Bull. Acad. Pol. Science, **19**, 545, 1971.
7. Kopczynski W. Phys. Lett., 1973.
8. Туняк В. Н. «Изв. АН БССР», сер. физ.-мат., **2**, 114, 1972.
9. Penrose R., Hawking S. Proc. Roy, Soc. A314, 529, 1970.
10. Пенроуз Р. Структура пространства-времени. М., 1972.
11. Finkelstein R. J. Math. Phys., 1, 440, 1960.

Поступила в редакцию
27.11 1972 г.

Кафедра
теоретической физики