Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1975

УДК 531.352

Ю. В. БАРКИН

УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

Методом Гамильтона — Якоби выводятся уравнения в элементах, описывающие возмущенное вращательное движение твердого тела относительно центра масс. За невозмущенное принимается свободное вращательное движение динамически-симметричного твердого тела.

Рассмотрим возмущенное движение произвольного по динамической структуре твердого тела M относительно центра масс.

Пусть $OXYZ$ — прямоугольная система декартовых координат с началом в центре инерции тела M и с осями постоянной ориентации в пространстве; $Oxyz$ — подвижная система координат, оси которой направлены по главным центральным осям инерции тела M; OL_1L_2L — система координат, связанная с вектором $\mathbf{L}$ кинетического момента вращательного движения тела M, ось OL направлена вдоль $\mathbf{L}$, ось OL_1 расположена в плоскости OLZ и образует тупой угол с осью Z, ось OL_2 дополняет систему до правой.

За обобщенные координаты, определяющие состояние вращательного движения рассматриваемого тела, примем углы Эйлера ψ, θ, φ; ψ — угол прецессии, измеряемый между линией пересечения плоскостей Oxy, OXY и ось OX, θ — угол нутации, измеряемый между осями OZ и Oz, φ — угол собственного вращения, измеряемый между линией пересечения плоскостей Oxy, OXY и осью Ox.

В дальнейшем будут использоваться величины $\bar{\rho}$ и $\bar{\sigma}$, определяющие взаимную ориентацию осей систем координат $OXYZ$ и OL_1L_2L, $\bar{\rho}$ — угол, измеряемый между вектором $\mathbf{L}$ и осью OZ, $\bar{\sigma}$ — угол, отсчитываемый между осью OX до проекции вектора $\mathbf{L}$ на плоскость OXY, и углы Эйлера $\bar{\psi}$, $\bar{\theta}$, $\bar{\varphi}$, определяющие взаимную ориентацию осей систем координат OL_1L_2L и $Oxyz$, $\bar{\psi}$ — угол процессии, измеряемый между осью OL_1 и линией пересечения плоскостей OL_1L_2, Oxy, $\bar{\theta}$ — угол нутации, измеряемый между осями Oz и OL, $\bar{\varphi}$ — угол собственного вращения, измеряемый между линией пересечения плоскостей OL_1L_2, Oxy и осью Ox.

§ 1. Постановка задачи

Если A, B, C — главные центральные моменты инерции тела M, то кинетическая энергия вращательного движения представится формулой

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

где p, q, r — проекции угловой скорости вращения на оси собственной системы координат. Эти величины связаны с углами ψ, θ, φ уравнениями Эйлера

$$p = \sin\theta \sin\varphi\dot{\psi} + \cos\varphi\dot{\theta},$$

$$q = \cos\varphi \sin\theta\dot{\psi} - \sin\varphi\dot{\theta},$$

$$r = \cos\theta\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}.$$

Пусть в рассматриваемой задаче о вращательном движении твердого тела относительно центра масс дана возмущающая функция R, определенным образом зависящая от углов ψ, θ, φ и времени

$$R = R(\psi, \theta, \varphi, t).$$

Принимая за канонические переменные координаты ψ, θ, φ и определяя сопряженные им канонические импульсы Ψ, Θ, Φ формулами

$$\Psi = Ap \sin\varphi \sin\theta + Bq \cos\varphi \sin\theta + Cr \cos\theta,$$

$$\Theta = Ap \cos\varphi - Bq \sin\varphi,$$

$$\Phi = Cr,$$

составим характеристическую функцию задачи

$$H = \frac{\operatorname{cosec}^2\theta}{2A}[(\Psi - \Phi\cos\theta)\sin\varphi + \Theta\cos\varphi\sin\theta]^2 +$$

$$+ \frac{\operatorname{cosec}^2\theta}{2B}[(\Psi - \Phi\cos\theta)\cos\varphi - \Theta\sin\varphi\sin\theta]^2 + \frac{1}{2C}\Phi^2 - R(\psi, \theta, \varphi, t).$$

Для вывода уравнений вращательного движения твердого тела относительно центра масс пользуются методом Гамильтона—Якоби [1]. Для этого представим характеристическую функцию H в виде суммы двух частей, полагая

$$H = H_0 + H_1,$$

где

$$H_0 = \frac{1}{2A}\left[\frac{1}{\sin^2\theta}(\Psi - \Phi\cos\theta)^2 + \Theta^2\right] + \frac{1}{2C}\Phi^2$$

есть основная часть характеристической функции, представляющая собой гамильтониан задачи о невозмущенном движении, а функция H_1 связана с возмущающей функцией R соотношением

$$-H_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\operatorname{cosec}^2\theta[(\Psi - \Phi\cos\theta)\cos\varphi - \Theta\sin\varphi\sin\theta]^2 + R.$$

Заметим, что функция H_0 является гамильтонианом задачи о свободном вращательном движении твердого тела, обладающего динамической симметрией, с главными центральными моментами инерции $A=B\neq C$.

Таким образом, если мы построим методом Гамильтона — Якоби общее решение задачи о невозмущенном движении, то метод изменения произвольных постоянных позволит описать вращательное движение тела M относительно центра масс формулами невозмущенного движения, в которых произвольные постоянные будут некоторыми функциями времени, определяемыми соответствующей системой канонических уравнений.

§ 2. Невозмущенное движение

Для интегрирования задачи о невозмущенном движении составим соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2A}\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial\psi}-\frac{\partial S}{\partial\varphi}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2\right]+\frac{1}{2C}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2=0. \quad (1)$$

Поскольку гамильтониан задачи о свободном вращательном движении динамически-симметричного твердого тела не зависит от переменных t, ψ, φ, то решение уравнения (1) удается построить методом разделения переменных. Полный интеграл уравнения в частных производных, содержащий три произвольных постоянных, имеет вид

$$S=-\alpha_1 t+\alpha_2\psi+\alpha_3\varphi+\int\sqrt{T(\theta)}\,d\theta,$$

где

$$T(\theta)=2A\alpha_1-\frac{A}{C}\alpha_3^2-\frac{(\alpha_2-\alpha_3\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}.$$

При помощи общей теории Гамильтона — Якоби мы можем написать общий интеграл

$$A\int\frac{d\theta}{\sqrt{T(\theta)}}=t+\beta_1,$$

$$\psi-\int\left\{\frac{1}{\sqrt{T(\theta)}}\left(\frac{\alpha_2-\alpha_3\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)\right\}d\theta=\beta_2, \quad (2)$$

$$\varphi+\int\left\{\frac{1}{\sqrt{T(\theta)}}\left[-\frac{A}{C}\alpha_3+\frac{(\alpha_2-\alpha_3\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}\right]\right\}d\theta=\beta_3,$$

$$\Psi=\alpha_2,\quad \Theta=\sqrt{T(\theta)},\quad \Phi=\alpha_3.$$

В формулах (2) β_1, β_2, β_3 сопряженные произвольные постоянные.

Осуществляя необходимые преобразования, разрешим уравнения (2) относительно канонических переменных. В результате общее решение задачи о невозмущенном движении запишется в следующем виде:

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2\xi_3}\sin\left[\frac{\sqrt{-\xi_3}}{A}(t+\beta_1)\right]-\frac{\xi_2}{2\xi_3},$$

$$2(\psi-\beta_2)=\arcsin\left[\frac{2\eta_3(1+\cos\theta)^{-1}+\eta_2}{\sqrt{-\Delta_2}}\right]-\arcsin\left[\frac{2\zeta_3(\cos\theta-1)^{-1}+\zeta_2}{\sqrt{-\Delta_3}}\right], \quad (3)$$

$$\varphi=\arcsin\left[\xi_0\frac{(\alpha_2-\alpha_3\cos\theta)}{\sin\theta}\right]+\frac{A-C}{AC}\alpha_3(t+\beta_1)+\beta_3,$$

$$\Psi=\alpha_2,\quad \Theta=\sqrt{T(\theta)},\quad \Phi=\alpha_3.$$

В формулы общего решения (3) введены новые обозначения:

$$\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i,\ \Delta_i\ (i = 1, 2, 3),\ \xi_0 \tag{4}$$

Величины (4) являются постоянными и выражаются через постоянные интегрирования α_1, α_2, α_3 и моменты инерции A, C следующими равенствами:

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= \left\{\frac{A}{C}(2C\alpha_1 - \alpha_3^2)\right\}^{-1/2},\\
\xi_1 &= \xi_0^{-2} - \alpha_2^2,\\
\xi_2 &= 2\alpha_2\alpha_3,\\
\xi_3 &= \eta_1 = \zeta_1 = -(\xi_0^{-2} + \alpha_3^2),\\
\eta_2 &= 2\alpha_3(\alpha_2 + \alpha_3) + 2\xi_0^{-2},\\
\eta_3 &= -(\alpha_2 + \alpha_3)^2,\\
\zeta_2 &= 2\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)^2 - 2\xi_0^{-2},\\
\zeta_3 &= -(\alpha_2 - \alpha_3)^2,\\
\Delta_1 &= 4\xi_1\xi_3 - \xi_2^2,\\
\Delta_2 &= 4\eta_1\eta_3 - \eta_2^2,\\
\Delta_3 &= 4\zeta_1\zeta_3 - \zeta_2^2.
\end{aligned} \tag{4'}$$

Вычисление интегралов в формулах (2) проводилось при предположении, что постоянные (4) удовлетворяют неравенствам

$$\xi_3 < 0,\ \eta_3 < 0,\ \zeta_3 < 0,\ \Delta_i < 0 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{5}$$

Можно показать, что неравенства (5) справедливы.

Уравнения (3)—(4) связывают углы Эйлера ψ, θ, φ с временем и шестью произвольными постоянными

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3 \tag{6}$$

и полностью описывают невозмущенное движение, т. е. свободное вращательное движение твердого тела, обладающего динамической симметрией.

§ 3. Уравнения вращательного движения в элементах

Метод изменения произвольных постоянных позволяет представить общее решение задачи о возмущенном вращательном движении твердого тела M формулами (3) и (4), в которых величины α_i, β_i ($i=1$, 2, 3) уже не являются постоянными, а некоторыми функциями, удовлетворяющими канонической системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial(-H_1)}{\partial\beta_i},\quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial(-H_1)}{\partial\alpha_i}. \quad (i = 1, 2, 3) \tag{7}$$

Функция H_1 с помощью формул (3)—(4′) приводится к виду, представляющему зависимость от элементов (6) и времени.

Частные производные функции H_1 по элементам α_1 и α_3 содержат члены, имеющие множитель $(t-t_0)$. Наличие таких членов ухудшает сходимость приближенного решения. Чтобы устранить этот недостаток, введем новые элементы

$$L, G, H, l, g, h, \tag{8}$$

согласно формулам преобразования

$$\begin{gathered} L=\left(2A\alpha_1+\frac{C-A}{C}\alpha_3^2\right)^{1/2}, \\ G=\alpha_2, \\ H=\alpha_3, \\ l=\frac{1}{A}\left(2A\alpha_1+\frac{C-A}{C}\alpha_3^2\right)^{1/2}(t+\beta_1), \\ g=\beta_2, \\ h=\frac{A-C}{AC}\alpha_3(t+\beta_1)+\beta_3. \end{gathered} \tag{8'}$$

Можно показать, что элементы (8) являются каноническими. Составляя формулу, определяющую каноничность преобразования, мы получаем

$$\beta_1 d\alpha_1+\beta_2 d\alpha_2+\beta_3 d\alpha_3-l dL-g dG-h dH=-d'(t\alpha_1).$$

Здесь штрих означает дифференцирование при фиксированной переменной t.

Таким образом, согласно теории канонических преобразований, новая система элементов (8') каноническая и ей отвечает характеристическая функция

$$F=-H_1-\alpha_1.$$

В элементах (8) уравнения возмущенного вращательного движения имеют канонический вид

$$\begin{gathered} \frac{dL}{dt}=\frac{\partial F}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt}=\frac{\partial F}{\partial g}, \quad \frac{dg}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt}=\frac{\partial F}{\partial h}, \quad \frac{dh}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial H}. \end{gathered} \tag{9}$$

С учетом формул (8) функция F приводится к следующему виду:

$$F=-\frac{L^2}{2A}-\frac{(A-C)H^2}{2AC}-H_1(L, G, H, l, g, h, t).$$

Выберем в качестве новой системы элементов ранее определенные величины

$$\bar{\rho}, \bar{\sigma}, \bar{\psi}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}, \tag{10}$$

добавив к ним шестой независимый элемент $\bar{L}=L$.

Углы Эйлера однозначно выражаются через элементы (10) с помощью тригонометрических соотношений

$$
\begin{aligned}
&\sin\theta\sin(\psi-\bar\sigma)=\sin\bar\psi\sin\bar\theta\cos\bar\rho+\cos\bar\theta\sin\bar\rho,\\
&\sin\theta\cos(\psi-\bar\sigma)=\cos\bar\psi\sin\bar\theta,\\
&\cos\theta\qquad\qquad\qquad=-\sin\bar\psi\sin\bar\theta\sin\bar\rho+\cos\bar\theta\cos\bar\rho,\\
&\sin\theta\sin(\varphi-\bar\varphi)=-\sin\bar\rho\cos\bar\psi,\\
&\sin\theta\cos(\varphi-\bar\varphi)=\cos\bar\theta\sin\bar\rho\sin\bar\psi+\cos\bar\rho\sin\bar\theta.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Сравнивая выписанные равенства с формулами общего решения (3)—(4′), которые мы считаем справедливыми и в возмущенном движении, можно установить однозначные зависимости между элементами (6) и величинами (10), которые с учетом равенства (8) запишутся следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\cos\bar\theta=\frac{H}{L},\quad \bar\psi=l,\\
\cos\bar\rho=\frac{G}{L},\quad \bar\varphi=h-\frac{\pi}{2},\\
\bar L=L,\quad \bar\sigma=g.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Осуществляя необходимые действия, мы приходим к уравнениям возмущенного вращательного движения в элементах (10):

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\bar L}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial\bar\psi},\\
&\frac{d\bar\rho}{dt}=\frac{1}{\bar L}\operatorname{cosec}\bar\rho\left\{\frac{\partial H_1}{\partial\bar\sigma}-\frac{\partial H_1}{\partial\bar\psi}\cos\bar\rho\right\},\\
&\frac{d\bar\theta}{dt}=\frac{1}{\bar L}\operatorname{cosec}\bar\theta\left\{\frac{\partial H_1}{\partial\bar\varphi}-\frac{\partial H_1}{\partial\bar\psi}\cos\bar\theta\right\},\\
&\frac{d\bar\sigma}{dt}=-\frac{1}{\bar L}\operatorname{cosec}\bar\rho\,\frac{\partial H_1}{\partial\bar\rho},\\
&\frac{d\bar\psi}{dt}=\frac{\bar L}{A}+\frac{1}{\bar L}\left\{\operatorname{ctg}\bar\theta\,\frac{\partial H_1}{\partial\bar\theta}+\operatorname{ctg}\bar\rho\,\frac{\partial H_1}{\partial\bar\rho}\right\},\\
&\frac{d\bar\varphi}{dt}=\frac{A-C}{AC}\bar L\cos\bar\theta-\frac{1}{\bar L}\operatorname{cosec}\bar\theta\,\frac{\partial H_1}{\partial\bar\theta}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Используя формулу невозмущенного движения

$$
\operatorname{cosec}\theta\,[(\Psi-\Phi\cos\theta)\cos\varphi-\Theta\sin\varphi\sin\theta]=\bar L\sin\bar\theta\cos\bar\varphi,
$$

выделим в правых частях уравнений (13) члены, содержащие частные производные возмущающей функции R по элементам (10).

Уравнения запишутся в следующем виде:

$$
\frac{d\bar L}{dt}=\frac{\partial R}{\partial\bar\psi},
$$

$$
\frac{d\bar\theta}{dt}=\bar L\sin\bar\theta\sin\varphi\,\cos\bar\varphi\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)+\frac{1}{\bar L}\operatorname{ctg}\bar\theta\,\frac{\partial R}{\partial\bar\psi}-\frac{1}{\bar L}\operatorname{cosec}\bar\theta\,\frac{\partial R}{\partial\bar\varphi},
$$

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{1}{\bar{L}} \operatorname{ctg} \bar{\rho} \frac{\partial R}{\partial \bar{\psi}} - \frac{1}{\bar{L}} \operatorname{cosec} \bar{\rho} \frac{\partial R}{\partial \bar{\sigma}}, \tag{13'}$$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = \frac{1}{\bar{L}} \operatorname{cosec} \bar{\rho} \frac{\partial R}{\partial \bar{\rho}},$$

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = \bar{L}\left(\frac{\sin^2\bar{\varphi}}{A} + \frac{\cos^2\bar{\varphi}}{B}\right) - \frac{1}{\bar{L}} \operatorname{ctg}\bar{\theta} \frac{\partial R}{\partial \bar{\theta}} - \frac{1}{\bar{L}} \operatorname{ctg}\bar{\rho} \frac{\partial R}{\partial \bar{\rho}},$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \bar{L}\cos\bar{\theta}\left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2\bar{\varphi}}{A} - \frac{\cos^2\bar{\varphi}}{B}\right) + \frac{1}{\bar{L}} \operatorname{cosec}\bar{\theta} \frac{\partial R}{\partial \bar{\theta}}.$$

Возмущающая функция в уравнениях (13′) с помощью формул (11) приводится к виду, дающему зависимость от элементов (10) и времени.

Уравнения (13′) иным способом получены В. В. Белецким [2]. и нашли широкое применение в работах по изучению вращательного движения искусственных спутников относительно центра масс.

Замечания

1. Уравнения возмущенного движения в элементах обладают свойствами уравнений Лагранжа.

2. Для случая динамически-симметричного твердого тела уравнения движения получаются из соответствующих уравнений (7), (9), (13′) путем замены функции $-H_1$ на возмущающую функцию.

3. При отсутствии возмущений $R=0$ уравнения (13′) описывают свободное вращательное движение трехосного твердого тела:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{\rho}}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{\sigma}}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \bar{L}\sin\bar{\theta}\sin\bar{\varphi}\cos\bar{\varphi}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right), \tag{14}$$

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = \bar{L}\left(\frac{\sin^2\bar{\varphi}}{A} + \frac{\cos^2\bar{\varphi}}{B}\right),$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \bar{L}\cos\bar{\theta}\left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2\bar{\varphi}}{A} - \frac{\cos^2\bar{\varphi}}{B}\right).$$

Уравнения (14) обладают полной системой первых интегралов

$$\bar{L} = c_1, \ \bar{\rho} = c_2, \ \bar{\sigma} = c_3,$$

$$\sin^2\bar{\theta}\left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2\bar{\varphi}}{A} - \frac{\cos^2\bar{\varphi}}{B}\right) = c_4, \tag{15}$$

$$\int\limits_0^{\bar{\varphi}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2\varphi}{A} - \frac{\cos^2\varphi}{B}\right)\left(\frac{1}{C} - c_4 - \frac{\sin^2\varphi}{A} - \frac{\cos^2\varphi}{B}\right)}} =$$

$$= \bar{L}(t - t_0) + c_5,$$

$$\bar{\psi} = \bar{L}\int_0^t \left(\frac{\sin^2\bar{\varphi}}{A} + \frac{\cos^2\bar{\varphi}}{B}\right) dt + c_6.$$

Формулы (15) дают общее решение задачи о свободном вращательном движении трехосного тела в переменных (10). Решение содержит полный набор произвольных постоянных c_i ($i=1, 2, 3, ..., 6$).

Чтобы получить общее решение задачи в углах Эйлера, достаточно подставить элементы (10), определяемые формулами (15), в формулы (11), из которых однозначно определяются переменные ψ, θ, φ.

Выражаю благодарность докт. физ. мат. наук М. С. Яров-Яровому за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубошин Г. Н. Небесная механика, основные задачи и методы. М., 1968.
2. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., 1965.

Поступила в редакцию
21.3 1973 г.

Кафедра небесной механики
и гравиметрии