

УДК 532.517

В. Н. АНУЧИН, Ю. Г. ПЫРКИН, М. М. ХАПАЕВ

## ТЕЧЕНИЕ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

В работе представлены некоторые результаты теоретического исследования характеристик природных плотностных потоков. На основе экспериментальных данных показано, что эти потоки близки по своему характеру к плоско-параллельным течениям.

Предложена гидродинамическая плоская модель течения жидкости одной плотности в неподвижной жидкости иной (меньшей) плотности вдоль наклонной плоскости. Результаты теоретического моделирования дают хорошее согласие с экспериментальными данными.

Особенности распределения турбулентных характеристик в стратифицированных потоках в последнее время все более привлекают к себе внимание исследователей в связи с их большим значением для многих прикладных задач геофизики.

В настоящей работе рассматривается задача о пристенном течении одной жидкости в неподвижной более легкой жидкости. В экспериментальных работах [1—8] показано, что поверхность раздела двух жидкостей разной плотности обладает специфическими свойствами. По данным прямых измерений [1—4] турбулентное напряжение  $\overline{u'w'}$  имеет ярко выраженный максимум вблизи границы раздела. На самой границе его значение падает. Эксперименты в [5—8] показывают, что на этой границе очень велико влияние молекулярной вязкости. Так, в [5—7] это установлено вплоть до значений  $Re/Fr = 4,5 \cdot 10^4$ , а в [8] до  $9 \cdot 10^4$ .

Параметр  $Re/Fr$  имеет вид

$$\frac{Re}{Fr} = \frac{h^{3/2} \sqrt{g \Delta \rho / \rho}}{\nu}, \quad (1)$$

где  $\Delta \rho$  — разность плотностей двух жидкостей,  $h$  — толщина движущего пристенного потока,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\rho$  — плотность этого потока. Число Рейнольдса, при котором влияние вязкости еще очень существенно, в [8] достигало значения  $Re = 6280$ . О сильном влиянии вязкости на границе раздела разноплотностных потоков свидетельствуют также работы [9, 10]. В них рассматривалось поведение нормальных к границе раздела возмущений, относительно которых эта граница, как показано в [11], наименее устойчива. Было выяснено, что возмущения на границе раздела потоков с разной плот-

ностью быстро затухают. Эти факты свидетельствуют о том, что механизм течения вблизи границы раздела двух жидкостей разной плотности близок к механизму течения вблизи жесткой стенки.

С учетом сказанного рассмотрим течение жидкости по наклонной плоскости в неподвижной более легкой жидкости за счет силы тяжести. Уравнения движения в приближении Прандтля для обеих жидкостей имеют вид

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\Delta \rho g^i}{\rho_1} + \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}, \quad (2)$$

$$u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} = \nu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}. \quad (3)$$

Подставляя в (2) и (3) уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

получаем систему уравнений, в которых  $u_1$  и  $\omega_1$  — составляющие скорости,  $\rho_1$  — плотность,  $\nu_1$  — кинематическая вязкость тяжелой жидкости, а  $u_2$ ,  $\omega_2$ ,  $\rho_2$ ,  $\nu_2$  — те же величины для легкой жидкости,  $i$  — уклон.

Граничные условия для системы (2) — (5) записываем следующим образом:

$$u_1|_{z=0} = 0, \quad (6)$$

$$\omega_1|_{z=0} = 0, \quad (7)$$

$$u_2|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad (8)$$

$$\omega_2|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial z} \right|_{z=h(x)} = \chi \left. \frac{\partial u_2}{\partial z} \right|_{z=h(x)}, \quad (10)$$

где  $\chi = \frac{\nu_2 \rho_2}{\nu_1 \rho_1}$ ,  $h(x)$  — граница раздела

$$u_1|_{z=h(x)} = u_2|_{z=h(x)}, \quad (11)$$

$$\omega_1|_{z=h(x)} = \omega_2|_{z=h(x)}. \quad (12)$$

Далее рассмотрим течение, в котором компоненты скорости могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \bar{u}_1 + u'_1, \\ u_2 &= \bar{u}_2 + u'_2, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\omega_1 = \omega'_1,$$

$$\omega_2 = \omega'_2,$$

т. е. рассмотрим плоско-параллельное течение. Близкие к (13) условия наблюдаются для плотностных потоков в природе [12]. Подставляя (13) в систему (2) — (5) и проводя осреднение по правилам Рейнольдса получим

$$v_1 \frac{d^2 \bar{u}_1}{dz^2} - \frac{d\bar{u}_1 \bar{w}_1'}{dz} + \frac{\Delta \rho g i}{\rho_1} = 0, \quad (14)$$

$$v_2 \frac{d^2 \bar{u}_2}{dz^2} - \frac{d\bar{u}_2 \bar{w}_2'}{dz} = 0. \quad (15)$$

Из уравнений неразрывности следует

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} = 0, \quad (16)$$

т. е.  $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(z)$ ;  $\bar{u}_2 = \bar{u}_2(z)$ .

Далее, приводя систему (14), (15) к безразмерному виду, имеем

$$\frac{1}{Re_1} \frac{d^2 V_1}{d\eta^2} + \frac{dr_1}{d\eta} = - \frac{1}{Fr^*}, \quad (14a)$$

$$\frac{1}{Re_2} \frac{d^2 V_2}{d\eta^2} + \frac{dr_2}{d\eta} = 0, \quad (15a)$$

где

$$\eta = \frac{z}{h}, \quad Re_1 = \frac{u_* h}{v_1}, \quad Re_2 = \frac{u_* h}{v_2},$$

$$V_1 = \frac{\bar{u}_1}{u_*}, \quad V_2 = \frac{\bar{u}_2}{u_*}, \quad Fr^* = \frac{u_*^2}{gh \frac{\Delta \rho}{\rho_1} i},$$

$$r_1 = - \frac{d\bar{u}_1 \bar{w}_1'}{u_*^2}, \quad r_2 = - \frac{d\bar{u}_2 \bar{w}_2'}{u_*^2},$$

$i$  — уклон

Граничные условия для системы (14a) и (15a) имеют вид

$$V_1|_{\eta=0} = 0, \quad V_2|_{\eta \rightarrow \infty} = 0, \quad (17)$$

$$V_1|_{\eta=1} = V_2|_{\eta=1}, \quad (18)$$

$$\left. \frac{dV_1}{d\eta} \right|_{\eta=1} = \chi \left. \frac{dV_2}{d\eta} \right|_{\eta=1}, \quad (19)$$

$$r_1|_{\eta=0} = 0, \quad (20)$$

$$r_2|_{\eta \rightarrow \infty} = 0, \quad (21)$$

$$r_1|_{\eta=1} = r_2|_{\eta=1} = 0. \quad (22)$$

Записывая граничное условие (22) в таком виде, мы полагаем, что механизм течения на границе раздела жидкостей и на жесткой границе одинаков. В действительности, турбулентное напряжение на границе раздела хотя и падает, но не равно нулю. Этот факт мы учтем при рассмотрении обратной задачи. В результате произведенных преобразований мы получили систему двух уравнений с четырьмя неизвестными, для ее замыкания необходимы дополнительные соображения. Для нижнего слоя будем проводить анализ, подобно [13 и 14]. Для верхнего слоя (т. е. слоя увлечения легкой жидкости) введем следующую связь между турбулентным напряжением и скоростью:

$$\frac{dr_2}{d\eta} = -\frac{1}{k} v_2, \quad (23)$$

где  $k = \frac{u_*}{dh}$ ;  $d$  — необходимо находить из эксперимента.

Выражение (23) соответствует граничным условиям (17) и (21), а также оправдано экспериментами (1). Так как мы считаем, что течения в пограничных областях определяются вязкими членами (что следует из граничных условий (20) и (22)), можно решить систему (14а) и (15а) без четвертого уравнения, считая  $r_1$  известной функцией.

Выражения для  $V_1$  и  $V_2$  имеют вид

$$V_1 = -Re_1 \int_0^\eta r_1 d\eta - \frac{Re_1}{2Fr^*} \eta^2 + c_1 \eta + c_2, \quad (24)$$

$$V_2 = c_3 e^{-\sqrt{\frac{Re_2}{k}} \eta} + c_4 e^{\sqrt{\frac{Re_2}{k}} \eta}. \quad (25)$$

Постоянные интегрирования  $c_1, c_2, c_3, c_4$  легко найти из граничных условий

$$c_2 = c_4 = 0, \quad (26)$$

$$c_1 = \frac{Re_1 \left( \chi \sqrt{\frac{Re_2}{k}} + 2 \right)}{2Fr^* \left( \chi \sqrt{\frac{Re_2}{k}} + 1 \right)}, \quad (27)$$

$$c_3 = \frac{Re_1 \exp \left( \sqrt{\frac{Re_2}{k}} \right)}{2Fr^* \left( \chi \sqrt{\frac{Re_2}{k}} + 1 \right)}. \quad (28)$$

Выражение для  $r_1$ , удовлетворяющее граничным условиям, вводим аналогично [13]. В [13] записан явный вид на основе экспериментальных измерений Лауфера [15], сравнение этой функции с более общей работой [16] дает также хорошее согласие, и  $r_1$  имеет вид

$$r_1 = 2(\eta - 1) [1 - (2\eta - 1)^{2(n-1)}] n(S - 1) / (n - 1) S, \quad (29)$$

где  $S$  — отношение касательного напряжения  $\tau_t$  на стенке при турбулентном течении к соответствующему касательному напряжению на стенке  $\tau_e$  при ламинарном течении с той же максимальной скоростью  $u_m$ ;  $n$  — целое число, большее или равное 2. Значение  $n$  следует определить из экспериментальных данных. По данным Лауфера, Бай Ши-и нашел

$$n = 1,4 S. \quad (30)$$

С учетом (26) — (29) выражения для скоростей течения плотностного потока и слоя увеличения будут иметь вид

$$V_1 = \frac{Re_1 \left( \chi \sqrt{\frac{Re_2}{k}} + 2 \right)}{2Fr^* \left( \chi \sqrt{\frac{Re_2}{k}} + 1 \right)} \eta - \frac{Re_1}{2Fr^*} \eta^2 - Re_1 \int_0^\eta r_1 d\eta, \quad (31)$$

$$V_2 = \frac{Re_1 \exp \left\{ \sqrt{\frac{Re_2}{k}} (1 - \eta) \right\}}{2Fr^* \left( \chi \sqrt{\frac{Re_2}{k}} + 1 \right)} \quad (32)$$

Следовательно, при задании вертикального распределения турбулентного напряжения можно получить профиль средней скорости течения.

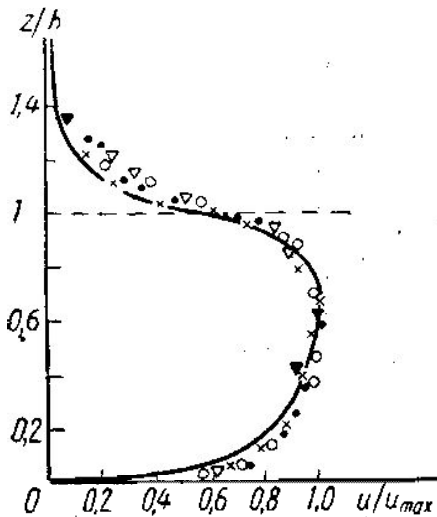


Рис. 1. Вертикальное распределение средней скорости течения придонного плотностного потока. Сплошная кривая — теоретический расчет, точки — данные работы [1]

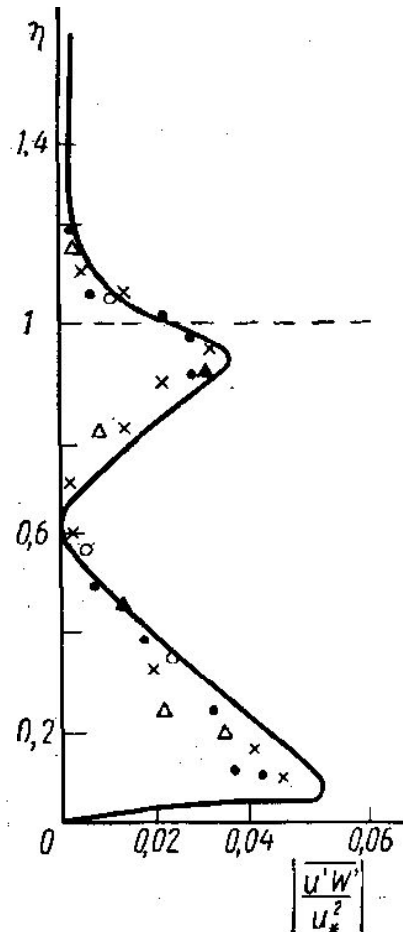


Рис. 2. Вертикальное распределение турбулентного напряжения. Обозначения те же, что на рис. 1

ния. На рис. 1 показаны теоретические кривые в сравнении с экспериментальными данными Георгиева [1]. Выражение для скорости  $V_1$  имеет максимум в точке, находящейся из уравнения

$$\frac{dV_1}{d\eta} = 0. \quad (33)$$

В случае узких по  $z$  потоков этот максимум, как показывают эксперименты [12, 17, 18], будет ярко выражен, в случае широких [1, 2] это будет не точка, а область. Система уравнений (14а) и (15а) позволяет также находить турбулентное напряжение по известному распределению средней скорости. Обратная задача особенно важна для экспериментальных приложений в силу того, что регистрация

средних скоростей течений может быть осуществлена значительно более простым методом, чем регистрация турбулентных пульсаций. Турбулентное напряжение находим из соотношений

$$r_1 = -\frac{1}{Re_1} \frac{dV_1}{d\eta} - \frac{1}{Fr^*} \eta + \frac{1}{Re_1} \frac{dV_1}{d\eta} \Big|_{\eta=0}, \quad (34)$$

$$r_2 = -\frac{1}{Re_2} \frac{dV_2}{d\eta} + \frac{1}{Re_2} \frac{dV_2}{d\eta} \Big|_{\eta \rightarrow \infty}. \quad (35)$$

Граничные условия для (34) и (35) будут иметь вид (20) и (21), а вместо (19) и (22) можно записать равенство полных напряжений на границе раздела двух жидкостей. На рис. 2 показано сравнение пересчитанных по формулам (34) и (35) турбулентных напряжений с экспериментальными данными, приведенными в работе [1].

Вышеизложенный анализ позволяет получить распределение средней скорости потока при задании распределения турбулентного напряжения. В то же время он позволяет получить некоторые сведения о турбулентных характеристиках, не производя прямого измерения пульсаций скорости течения.

Отсутствие достаточно полных натуральных измерений характеристик придонных плотностных течений не позволяет провести количественного сравнения теоретических и экспериментальных результатов. Рис. 1 и 2 отражают скорее качественную картину. Однако из них видно, что функциональные зависимости, полученные из решений прямой и обратной задачи, достаточно близки к лабораторным измерениям, проводившимся в близких к рассматриваемым в теоретической схеме условиям.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Georgiev B. V. Preprints Inter. Symp. of strat. flows. Novosibirsk, 1972.
2. Анисимова Е. П., Сперанская А. А. Материалы международного симпозиума по стратифицированным течениям. Новосибирск, 1972.
3. Jwasaki T., Abe T. Preprints Inter. Symp. of strat. flows., Novosibirsk, 1972.
4. Lofquist K. Phys. of Fluids, 3, No. 2, 1960.
5. Barr D. J. H. Houille blanche, No. 7, 1963.
6. Barr D. J. H., Nassan A. M. M. Houille blanche, No. 7, 1963.
7. Barr D. J. H. Houille blanche, No. 6, 1967.
8. Розовский И. Л., Шабрин А. Н., Марков С. Б. Материалы международного симпозиума по стратифицированным течениям. Новосибирск, 1972.
9. Browand F. K., Wand Y. H. Prepr. Inter. Symp. of strat. flows. Novosibirsk, 1972.
10. Winant C. D. Preprints Inter. Symp. of strat. flows. Novosibirsk, 1972.
11. Салагаков А. М., Штерн В. Н. «Прикладная математика и теоретическая физика», № 6, 1971.
12. Анучин В. Н., Гусев А. М., Михайлова Н. А., Петров В. П., Пыркин Ю. Г. Материалы международного симпозиума по стратифицированным течениям. Новосибирск, 1972.
13. Pai S. J. Appl. Mech., 20, No. 1, 1953.
14. Pai S. J. Jour. of the Franklin inst., 256, No. 4, 1953.
15. Laufer J. Jour. Aero Sci., 17, No. 5, 1950.
16. Марченко А. Г. «Прикладная математика и теоретическая физика», № 3, 1971.
17. Поборчая Л. В. «Океанология», 2, вып. 5, 1962.
18. Кулеш Н. П. «Изв. вузов», сер. строительство, № 8, 1959.

Поступила в редакцию  
21.2 1973 г.

Кафедра  
физики моря и вод суши