ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1975

УДК 621.372.001.5

П. С. ЛАНДА

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГЕНЕРАТОРА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ ВБЛИЗИ ПОРОГА ВОЗБУЖДЕНИЯ

Получены выражения для спектров автоколебаний и флуктуаций интенсивности для генераторов Ван-дер-Поля, справедливые во всей области превышений над порогом генерации.

Если амплитуда автоколебаний в генераторе достаточно велика, а действующие флуктуационные силы достаточно малы, то для расчета статистических характеристик такого генератора можно использовать корреляционную теорию [1, 2, 3]. При этом легко могут быть получены форма и ширина спектра автоколебаний, спектр флуктуаций амплитуды и частоты и т. д.

Положение значительно осложняется, если генератор работает вблизи порога самовозбуждения, когда среднее значение амплитуды автоколебаний становится сравнимым с флуктуациями. В этом случае общих методов расчета флуктуаций не существует. Расчет может быть проведен только в частном случае, когда источники шума, действующего на генератор, являются достаточно широкополосными, так что их времена корреляции много меньше времени установления автоколебаний [1, 2]. Проведение такого расчета представляет интерес, поскольку этому условию удовлетворяют естественные флуктуации в генераторах, а измерение естественных флуктуаций как раз удобно, когда генератор работает вблизи порога и флуктуации сравнительно велики. Так, в работах [4, 5] проводились измерения естественных флуктуаций в лазере вблизи порога возбуждения и было получено значение естественной ширины линии.

При выполнении указанного условия задача сводится к решению уравнения Фоккера—Планка. В литературе, как правило, рассматривается лишь стационарное решение такого уравнения, позволяющее вычислить, например, одновременные моменты амплитуды. Для получения же спектральных характеристик требуется решение нестационарного уравнения Фоккера—Планка. Такое решение приближенно получено в настоящей работе методом Бубнова—Галеркина. На основе этого решения вычислены спектры флуктуаций амплитуды и генерируемого сигнала. В предельном случае больших превышений над порогом генерации полученные выражения полностью совпадают с результатами корреляционной теории.

Исходные соотношения

Рассмотрим генератор Ван-дер-Поля, описываемый уравнением

$$\ddot{y} - 2\mu(\eta - y^2)\dot{y} + \omega_0^2 y = \zeta(t). \tag{1}$$

Здесь μ — малый параметр, η — превышение над порогом генерации, $\zeta(t)$ — широкополосный случайный источник.

Заметим, что вблизи порога генерации вместо обычно используемых амплитуды и фазы удобней пользоваться декартовыми переменными

$$x_1 = A\cos\varphi, \quad x_2 = A\sin\varphi,$$

поскольку фаза φ в этом случае не является медленно меняющейся переменной и для нее нельзя записать укороченное уравнение.

Полагая

$$y = x_1 \cos\omega_0 t - x_2 \sin\omega_0 t,$$

для переменных x_1, x_2 обычным способом получаем следующие укороченные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu x_1 \left[\eta - \frac{x_1^2 + x_2^2}{4}\right] - \zeta(t)\sin\omega_0 t, \\ \dot{x}_2 &= \mu x_2 \left[\eta - \frac{x_1^2 + x_2^2}{4}\right] - \zeta(t)\cos\omega_0 t. \end{aligned} \tag{2}$$

Уравнениям Ланжевена (2) соответствует следующее уравнение Фоккера—Планка, записанное в полярных координатах A, φ:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{N}{2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial A^2} + \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial A}\right) - \\ - \mu\frac{\partial}{\partial A}\left[A\left(\eta - \frac{A^2}{4}\right)W\right] - \mu\left(\eta - \frac{A^2}{4}\right)W. \tag{3}$$

При выводе уравнения (3) использовано, что $\zeta(t)$ — стационарный случайный процесс и обозначено

$$N = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \langle\zeta\zeta_\tau\rangle \cos\omega_0\tau d\tau.$$

Решение уравнения (3) должно удовлетворять граничным условиям

$$\left.\frac{\partial W}{\partial A}\right|_{A=0} = 0, \ W|_{A\to\infty} = 0, \ W(t, A, \varphi) = W(t, A, \varphi + 2\pi) \tag{4}$$

и условию нормировки

$$\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi}\int_0^{\infty} W(t, A, \varphi)\, A dA d\varphi = 1.$$

Решение уравнения (3) будем искать в виде

$$W(t, A, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T_{nm} e^{-\lambda_{nm}t + in\varphi} X_{nm}(A). \tag{5}$$

Для функций $X_{nm}(A)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2X_{nm}}{dA^2}+\frac{1}{A}\frac{dX_{nm}}{dA}-2\frac{\mu}{N}\frac{d}{dA}\left[A\left(\eta-\frac{A^2}{4}\right)X_{nm}\right]-$$
$$-2\frac{\mu}{N}\left(\eta-\frac{A^2}{4}\right)X_{nm}+\frac{2}{N}\lambda_{nm}X_{nm}-\frac{n^2}{A^2}X_{nm}=0. \qquad (6)$$

Отсюда видно, что собственные функции X_{nm} и собственные значения λ_{nm} должны обладать следующими свойствами:

$$X_{nm}=X_{-nm}, \quad \lambda_{nm}=\lambda_{-nm}.$$

Уравнение (6) имеет собственное значение $\lambda_{00}=0$. Соответствующая собственная функция представляет собой решение стационарного уравнения Фоккера—Планка, т. е.

$$X_{00}(A)=W_{\text{ст}}(A)=\frac{C}{2\pi}\exp\left\{-\frac{\mu}{8N}(A^2-4\eta)^2\right\}, \qquad (7)$$

где

$$C=\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{\mu}{N}}\left[1+\Phi\left(2\eta\sqrt{\frac{\mu}{N}}\right)\right]^{-1}. \qquad (8)$$

Собственные функции $X_{nm}(A)$ должны удовлетворять следующему условию ортогональности и нормировки:

$$\int\limits_0^\infty AX_{nm}(A)X_{nl}(A)\frac{dA}{W_{\text{ст}}(A)}=\frac{1}{2\pi}\delta_{ml}. \qquad (9)$$

Двумерное распределение для A и φ $W(A_\tau, \varphi_\tau;\ A, \varphi)$ можно выразить через одномерное $W(A, \varphi)$ и вероятность перехода $p(A_\tau, \varphi_\tau;\ A, \varphi;\ \tau)$:

$$W(A_\tau, \varphi_\tau;\ A, \varphi)=W(A, \varphi)\,p(A_\tau, \varphi_\tau;\ A, \varphi;\ \tau). \qquad (10)$$

Вероятность перехода должна удовлетворять уравнению (3) и начальному условию

$$p(A_\tau, \varphi_\tau;\ A, \varphi, 0)=\frac{1}{A}\delta(A_\tau-A)\,\delta(\varphi_\tau-\varphi). \qquad (11)$$

Записав $p(A_\tau, \varphi_\tau;\ A, \varphi, \tau)$ в виде (5), вычислим коэффициенты T_{nm} из начального условия (11). Для этого положим в (5) $t=0$, умножим обе части равенства на $X_{nm}(A_\tau)e^{-in\varphi_\tau}/W_{\text{ст}}(A_\tau)$ и проинтегрируем по A_τ и φ_τ. Тогда с учетом (9) и (11) для коэффициентов T_{nm} получим выражение

$$T_{nm}=\frac{X_{nm}(A)}{W_{\text{ст}}(A)}. \qquad (12)$$

Подставляя (12) в (5) и затем в (10) и полагая $W(A, \varphi)=W_{\text{ст}}(A)$, получим двумерное распределение вероятностей для A и φ:

$$W(A_\tau, \varphi_\tau;\ A, \varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}X_{nm}(A_\tau)X_{nm}(A)e^{in(\varphi_\tau-\varphi)-\lambda_{nm}|\tau|}. \qquad (13)$$

Зная двумерное распределение (13), можно вычислить, например, корреляционные функции интенсивности $I=A^2$ и переменных x_1 и x_2:

$$K_I(\tau)=\langle II_\tau\rangle-\langle I\rangle^2=4\pi^2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^\infty A^3X_{0m}(A)\,dA\right)^2e^{-\lambda_{0m}|\tau|},$$

$$K_{x_1}(\tau) = K_{x_2}(\tau) = 2\pi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} A^2 X_{1m}(A)\, dA \right)^2 e^{-\lambda_{1m}|\tau|},$$

$$K_{x_1x_2}(\tau) = K_{x_2x_1}(\tau) = \langle x_1 x_{2\tau} \rangle - \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle = 0.$$

Соответственно для спектральных плотностей получаем выражения

$$S_I(\omega) = 8\pi \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} A^3 X_{0m}(A)\, dA \right)^2 \frac{\lambda_{0m}}{\omega^2 + \lambda_{0m}^2},$$

$$S_{x_1}(\omega) = S_{x_2}(\omega) \equiv S_x(\omega) = 4\pi \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} A^2 X_{1m}(A)\, dA \right)^2 \frac{\lambda_{1m}}{\omega^2 + \lambda_{1m}^2}. \qquad (14)$$

Покажем, что спектр колебания $y(t)$ определяется спектральной плотностью $S_x(\omega)$. Для этого запишем корреляционную функцию $K_y(\tau)$. С учетом того, что $K_{x_1}(\tau) = K_{x_2}(\tau)$ и $K_{x_1x_2}(\tau) = 0$, имеем $K_y(\tau) = K_x(\tau) \cos \omega_0 \tau$. Отсюда следует, что

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2} S_x(\omega - \omega_0).$$

Таким образом, для определения формы и ширины спектра колебания $y(t)$ и флуктуаций его интенсивности требуется знать собственные значения λ_{0m} и λ_{1m} и собственные функции $X_{0m}(A)$ и $X_{1m}(A)$. Практически, если нас не интересуют детали спектра на частотах, далеких от резонанса, в выражениях (14) можно ограничиться одним или двумя членами, т. е. при этом достаточно вычислить лишь наинизшие собственные значения и соответствующие им собственные функции.

Стационарное решение уравнения Фоккера — Планка и моменты амплитуды

Прежде чем перейти к расчету собственных значений λ_{0m} и λ_{1m}, рассмотрим стационарное решение уравнения (4) и вычислим моменты амплитуды колебаний. Стационарное решение уравнения Фоккера—Планка имеет вид (7), (8). Это решение позволяет вычислить моменты $\langle A^n \rangle$:

$$\langle A^n \rangle = C \int_0^{\infty} A^{n+1} e^{-\frac{\mu}{8N}(A^2 - 4\eta)^2} dA =$$

$$= C \left(\frac{4N}{\mu} \right)^{n/4} \sqrt{\frac{N}{\mu}}\, \Gamma\left(\frac{n+2}{2} \right) e^{-\frac{\mu\eta^2}{N}} D_{-\frac{n+2}{2}}\left(-2\eta \sqrt{\frac{\mu}{N}} \right). \qquad (15)$$

Здесь $D_\nu(z)$ — функция параболического цилиндра.

Выпишем значения моментов $\langle A^n \rangle$ в трех предельных случаях:

1. $\eta > 0$, $\eta \sqrt{\frac{\mu}{N}} \gg 1$ — большие превышения над порогом генерации. Воспользовавшись асимптотическим выражением для функций параболического цилиндра при больших отрицательных значениях аргумента [6], получаем

$$\langle A^n \rangle = (4\eta)^{n/2} \left[1 + \frac{n(n-2)}{32\eta^2} \frac{N}{\mu} \right].$$

Отсюда, в частности, легко получить выражения для дисперсии флуктуаций амплитуды и интенсивности:

$$\langle \delta A^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = \frac{N}{4\mu\eta},$$

$$\langle \delta I^2 \rangle = \langle A^4 \rangle - \langle A^2 \rangle^2 = \frac{4N}{\mu}.$$

Такие же выражения получаются из корреляционной теории. Следовательно, условие $\eta \sqrt{\mu/N} \gg 1$ есть условие применимости корреляционного приближения.

2. $\eta < 0$, $|\eta| \sqrt{\frac{\mu}{N}} \gg 1$ — значительно ниже порога генерации. В этом случае воспользуемся асимптотическими выражениями для функций параболического цилиндра при больших положительных значениях аргумента, а также асимптотическим представлением для интеграла вероятности [6]. Тогда получим

$$\langle A^n \rangle = \left(\frac{N}{\mu |\eta|} \right)^{n/2} \Gamma \left(\frac{n+2}{2} \right).$$

Отсюда

$$\langle \delta A^2 \rangle = \frac{4-\pi}{4} \frac{N}{\mu |\eta|}; \quad \langle \delta I^2 \rangle = \frac{N^2}{\mu^2 \eta^2}.$$

3. $\eta = 0$ — порог генерации. При этом

$$\langle A^n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{8N}{\mu} \right)^{n/4} \Gamma \left(\frac{n+2}{4} \right),$$

$$\langle \delta A^2 \rangle = \sqrt{\frac{8N}{\pi\mu}} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma^2 \left(\frac{3}{4} \right) \right], \tag{16}$$

$$\langle \delta I^2 \rangle = \frac{4(\pi - 2)}{\pi} \frac{N}{\mu}.$$

Из (16) следует, что на пороге генерации относительная дисперсия флуктуаций интенсивности $\langle \delta I^2 \rangle / \langle I \rangle^2$ не зависит от величины шума и равна $\frac{\pi - 2}{2} \approx 0{,}57$.

Определение собственных значений λ_{0m}, λ_{1m} и собственных функций X_{0m}, X_{1m}

Решение уравнения (6) приближенно представим в виде

$$X_{nm}(A) = \sum_{j=0}^{k} \frac{C_{jnm}}{2\pi} \varphi_{jn}(A), \tag{17}$$

где

$$\varphi_{jn}(A) = A^{n+2j} \exp \left\{ -\frac{\mu}{8N} (A^2 - 4\eta)^2 \right\}. \tag{18}$$

Коэффициенты C_{jnm} и собственные значения λ_{nm} будем искать методом Бубнова—Галеркина, используя в качестве заданных форм функции $\varphi_{jn}(A)$. Для этого подставим (17), (18) в левую часть уравнения (6), умножим последовательно на функции $\varphi_{jn}(A)$ и проинтегрируем по A^2 от нуля до бесконечности. Согласно методу Бубнова—Галеркина результаты интегрирования следует приравнять нулю. При этом получим систему k линейных однородных уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_{jnm}. Собственные значения λ_{nm} определяются из условия равенства нулю детерминанта этой системы. Это условие приводит к алгебраическому уравнению $k+1$-й степени, позволяющему приближенно определить $k+1$ низших собственных значений. Для приближенного определения первых двух собственных значений достаточно ограничиться $k=1$. При этом для собственных значений λ_{01}, λ_{10} и λ_{11}, входящих в выражения (14), получаем

$$\lambda_{01} = \frac{\sqrt{\mu N}}{2} B_0 - 2\eta\mu, \tag{19}$$

$$\lambda_{10} = \frac{\sqrt{\mu N}}{4}(B_1 - \Delta_1) - 2\eta\mu, \quad \lambda_{11} = \frac{\sqrt{\mu N}}{4}(B_1 + \Delta_1) - 2\eta\mu,$$

где

$$B_0 = 5\,\frac{7D_{-3/2}(a)\,D_{-9/2}(a) - 3D_{-5/2}(a)\,D_{-7/2}(a)}{5D_{-3/2}(a)\,D_{-7/2}(a) - 3D^2_{-5/2}(a)}, \tag{20}$$

$$B_1 = \frac{21}{2}\,\frac{9D_{-5/2}(a)\,D_{-11/2}(a) - 5D_{-7/2}(a)\,D_{-9/2}(a)}{7D_{-5/2}(a)\,D_{-9/2}(a) - 5D^2_{-7/2}(a)},$$

$$\Delta_1 = \left\{(B_1 + 2a)^2 - 16 - 105\,\frac{9D_{-7/2}(a)\,D_{-11/2}(a) - 7D^2_{-9/2}(a)}{7D_{-5/2}(a)\,D_{-9/2}(a) - 5D^2_{-7/2}(a)}\right\},$$

$$a = -2\eta\sqrt{\frac{\mu}{N}}.$$

Для спектральных плотностей $S_I(\omega)$ и $S_y(\omega)$ получаем следующие приближенные выражения:

$$S_I(\omega) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\left[\langle A^2\rangle + \dfrac{C_{101}}{C_{001}}\langle A^4\rangle\right]^2}{1 + 2\dfrac{C_{101}}{C_{001}}\langle A^2\rangle + \left(\dfrac{C_{101}}{C_{001}}\right)^2\langle A^4\rangle}\,\frac{\lambda_{01}}{\omega^2 + \lambda_{01}^2}, \tag{21}$$

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{[\langle A^2\rangle + \langle A^4\rangle\, C_{110}/C_{010}]^2}{\langle A^2\rangle + 2\dfrac{C_{110}}{C_{010}}\langle A^4\rangle + \left(\dfrac{C_{110}}{C_{010}}\right)^2\langle A^6\rangle}\,\frac{\lambda_{10}}{(\omega-\omega_0)^2 + \lambda_{10}^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left[\langle A^2\rangle + \langle A^4\rangle\, C_{111}/C_{011}\right]^2}{\langle A^2\rangle + 2\dfrac{C_{111}}{C_{011}}\langle A^4\rangle + \left(\dfrac{C_{111}}{C_{011}}\right)^2\langle A^6\rangle}\,\frac{\lambda_{11}}{(\omega-\omega_0)^2 + \lambda_{11}^2}\right\}.$$

Рассмотрим те же предельные случаи, что и в предыдущем разделе:

1. $\eta > 0$, $\eta \sqrt{\frac{\mu}{N}} \gg 1$. Из (19)—(21) получаем

$$\lambda_{01} = \lambda_{11} = 2\eta\mu = \frac{\mu}{2}\langle A^2\rangle,\ \lambda_{10} = \frac{N}{8\eta} = \frac{N}{2\langle A^2\rangle},$$

$$S_I(\omega) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\lambda_{01}\langle \delta I^2\rangle}{\omega^2 + \lambda_{01}^2}, \tag{22}$$

$$S_y(\omega) = \frac{\langle A^2\rangle}{2\pi}\left\{\frac{\lambda_{10}}{(\omega-\omega_0)^2+\lambda_{10}^2} + \frac{\langle \delta A^2\rangle}{\langle A^2\rangle}\frac{\lambda_{11}}{(\omega-\omega_0)^2+\lambda_{11}^2}\right\}.$$

Такие же выражения для спектров получаются из корреляционной теории.

2. $\eta < 0$, $|\eta| \sqrt{\frac{\mu}{N}} \gg 1$.

При этом

$$\lambda_{01} = 2\mu|\eta| = \frac{2N}{\langle A^2\rangle},\ \lambda_{10} = \mu|\eta| = \frac{N}{\langle A^2\rangle},\ \lambda_{11} = 3\mu|\eta| = \frac{3N}{\langle A^2\rangle}.$$

Расчет показывает, что в этом случае интенсивность второй линии в спектральной плотности $S_y(\omega)$ ничтожно мала. Поэтому можно ограничиться лишь одним членом:

$$S_y(\omega) = \frac{\langle A^2\rangle}{2\pi}\frac{\lambda_{10}}{(\omega-\omega_0)^2+\lambda_{10}^2}. \tag{23}$$

Для спектральной плотности $S_I(\omega)$ получаем выражение (22).

Выражение (23) для спектральной плотности колебания $y(t)$ может быть получено также непосредственно из уравнения (1), если в нем пренебречь нелинейным членом.

3. $\eta = 0$. Используя значения гамма-функций, находим следующие приближенные выражения для λ_{01}, λ_{10}, λ_{11}:

$$\lambda_{01} = 4{,}2\frac{N}{\langle A^2\rangle},\ \lambda_{10} = 0{,}95\frac{N}{\langle A^2\rangle},\ \lambda_{11} = 6{,}9\frac{N}{\langle A^2\rangle}. \tag{24}$$

Для спектральных плотностей $S_I(\omega)$ и $S_y(\omega)$ получаются выражения (22) и (23).

Из полученных результатов следует, что во всех рассмотренных случаях почти вся энергия колебания $y(t)$ заключена в лоренцовской линии, ширина которой равна собственному значению λ_{10}. Поэтому можно считать, что величина λ_{10} определяет ширину спектра колебания $y(t)$. Формулу для λ_{10} удобно записать в виде

$$\lambda_{10} = \alpha(\eta)\frac{N}{2\langle A^2\rangle},$$

где $\alpha(\eta)$ — некоторая функция превышения над порогом генерации. Значения этой функции для любого η можно определить, исходя из выражений (19), (20) и (15). При $\eta > 0$ $\eta\sqrt{\frac{\mu}{N}} \gg 1$, $\alpha(\eta) = 1$; при $\eta < 0$ $|\eta|\sqrt{\frac{\mu}{N}} \gg 1$, $\alpha(\eta) = 2$; при $\eta = 0$ $\alpha(0) = 1{,}9$. Величина $N/\langle A^2\rangle$

в корреляционном приближении представляет собой коэффициент диффузии фазы.

Формула (24) показывает, что вблизи порога генерации ширина линии не равна коэффициенту диффузии фазы. Это связано с тем, что вблизи порога флуктуации фазы не являются гауссовскими, вследствие чего коэффициент диффузии фазы не определяет ширину линии [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. М., 1966.
2. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., 1961.
3. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М., 1968.
4. Siegman A. E., Arrathoon R. Phys. Rev. Let., 20, 901, 1968.
5. Arrathoon R., Siegman A. E. J. Appl. Phys., 40, 910, 1969.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.

Поступила в редакцию
11.5 1973 г.

Кафедра
общей физики для мехмата