Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1975

УДК 538.574 : 538.561

С. М. ЧУРИЛОВ

РАССЕЯНИЕ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ЭЛЕКТРОНАХ ПЛАЗМЫ

Исследовано движение и излучение электронов разреженной плазмы в интенсивной плоской волне с учетом силы реакции излучения. Показано, что учет реакции излучения приводит к тому, что электроны излучают в направлении распространения волны как основную, так и утроенную частоту. Найдено решение в квадратурах уравнения для генерации излучения на утроенной частоте и сделаны оценки величины эффекта.

Вопрос о движении и излучении заряженных частиц в поле интенсивной электромагнитной волны рассматривался рядом авторов [1—5]. Эта проблема вызывает интерес, во-первых, с общефизической точки зрения, во-вторых, с чисто практической стороны в связи с применением в физических исследованиях источников интенсивного когерентного микроволнового и светового излучения, в-третьих, в астрофизическом аспекте, поскольку, согласно современным представлениям, вблизи некоторых объектов (например, пульсаров [4]) должны быть сильные электромагнитные поля. Поэтому выявление характерных черт взаимодействия интенсивного излучения с веществом является важной задачей.

Один из наиболее интересных вопросов заключается в том, как излучение движущихся в волне зарядов «портит» саму волну. Сарачик и Шапперт дали [1] полный анализ поведения свободного заряда в интенсивной плоской волне без учета силы реакции излучения и показали, что вперед (в направлении распространения волны) излучается лишь основная частота, хотя в других направлениях излучаются и кратные частоты. Причину этого легко объяснить.

Уравнения движения заряда имеют вид

$$\frac{d^2x^i}{dT^2} = \frac{q}{mc} F^{ik} \frac{dx_k}{dT}, \tag{1}$$

где T — собственное время, q, m — заряд и масса частицы, F^{ik} — тензор электромагнитного поля; $x^i = \{\tau, \mathbf{r}\}$ — четырехвектор координат частицы, c — скорость света.

Пусть волна распространяется вдоль оси z. Вычитая из нулевого компонента уравнения (1) третий и учитывая, что в бегущей волне магнитное поле связано с электрическим соотношением

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n}\,\mathbf{E}],$$

где $\mathbf{n} = \{0, 0, 1\}$ — единичный вектор вдоль оси z, получим

$$\gamma(1 - \dot{z}) = J_0 = \text{const}, \tag{2}$$

где $\gamma = (1 - \dot{\mathbf{r}}^2)^{-1/2}$, а точка обозначает дифференцирование по временной координате $\tau = ct$. Тензор F^{ik} является функцией аргумента $\varphi = \tau - z$, который пропорционален собственному времени T. Действительно, используя (2), получим

$$\frac{d\varphi}{dT} = \frac{d\varphi}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dT} = c\gamma(1 - \dot{z}) = cJ_0. \tag{3}$$

Преобразуем (1) к уравнениям, содержащим только производные по запаздывающему времени $\tau' = \tau - \boldsymbol{\nu}\mathbf{r}$, где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор в направлении наблюдателя. Тогда лишь при $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{n}$ $\tau' = \varphi$, и преобразованные уравнения движения будут линейными, следовательно, будет излучаться лишь основная частота (см. (15)). Для всех остальных направлений уравнение будет нелинейным, что и выразится в излучении кратных частот.

Учет реакции излучения вносит существенную нелинейность в уравнения движения заряда, поэтому должна измениться и картина излучения. Зельдович и Илларионов [2] исследовали поведение электронов разреженной плазмы в интенсивной плоской волне, поляризованной по кругу, с учетом силы реакции излучения. Поскольку электроны в данном случае будут равномерно двигаться по окружности, то вперед по-прежнему будет излучаться лишь основная частота. Однако для произвольной эллиптической поляризации результат будет иным.

В настоящей работе исследуется поведение электронов разреженной плазмы в интенсивной плоской электромагнитной волне произвольной эллиптической поляризации с учетом силы реакции излучения, причем особое внимание уделяется излучению в направлении распространения волны.

Движение отдельного заряда в интенсивной волне с учетом силы реакции излучения

Если электрон, взаимодействующий с волной, находится в плазме, возникает электрическое поле $\mathbf{E}_0$, параллельное вектору $\mathbf{n}$ и уравновешивающее силу давления волны, поэтому электрон совершает финитное движение и его усредненный импульс равен нулю. Ионы, как более тяжелые частицы, предполагаются покоящимися.

Введем, следуя [3], обозначения:

$$\mathbf{e} = \frac{q\mathbf{E}}{mc^2}, \quad \mathbf{h} = \frac{q\mathbf{H}}{mc^2}, \quad g = \frac{2}{3}\,r_0 = \frac{2}{3}\,\frac{q^2}{mc^2},$$

$$g e_0\,\mathbf{n} = \frac{qE_0}{mc^2}.$$

Тогда уравнение движения заряда q в поле волны $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и постоянном электрическом поле $\mathbf{E}_0$ с учетом силы реакции излучения в первом порядке по g можно записать следующим образом (см. [6]):

$$\frac{d}{d\tau}(\gamma\dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{e} + [\dot{r}\,\mathbf{h}] + g e_0\,\mathbf{n} + \mathbf{f}, \tag{4}$$

где

$$\mathbf{f} = g\left\{\gamma\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \dot{\mathbf{r}}\nabla\right)\mathbf{e} + \right.$$

$$+\gamma\left[\dot{\mathbf{r}}\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \dot{\mathbf{r}}\nabla\right)\mathbf{h}\right] + \mathbf{e}(\mathbf{e}\dot{\mathbf{r}}) + [(\mathbf{e} + [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{h}])\mathbf{h}] - \gamma^2\dot{\mathbf{r}}((\mathbf{e} + [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{h}])^2 -$$

$$\left. - (\mathbf{e}\dot{\mathbf{r}})^2)\right\} \tag{5}$$

сила реакции излучения, причем

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}(\varphi),\ (\mathbf{e}\,\mathbf{n}) = 0,\ \mathbf{h} = [\mathbf{n}\,\mathbf{e}]. \tag{6}$$

Подставим (6) в (4), (5) и перейдем от переменных $\mathbf{r}$, τ к новым переменным J, ρ, φ:

$$\gamma(1 - \dot{z}) = J, \quad \dot{r} = \dot{\mathbf{r}}_{\perp} + \mathbf{n}\dot{z}, \tag{7}$$

$$\rho = \frac{\mathbf{r}_{\perp}}{1 - \dot{z}}, \quad \frac{d}{d\tau} = \frac{J}{\gamma}\,\frac{d}{d\varphi},$$

где $\mathbf{r}_{\perp}$ — компонент радиус-вектора электрона, лежащий в плоскости перпендикулярной вектору $\mathbf{n}$. Получим более удобные для анализа уравнения:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\mathbf{e}}{J} + g\left\{\frac{d\mathbf{e}}{d\varphi} + \frac{e_0}{J}\rho\right\},$$

$$\frac{dJ}{d\varphi} = -g\{e_0 + J^2\mathbf{e}^2\}. \tag{8}$$

Исходные величины, характеризующие движение, выражаются через новые переменные по формулам

$$\gamma\dot{z} = \frac{1}{2}J\rho^2 + \frac{1 - J^2}{2J}, \quad \gamma = \frac{1}{2}J\rho^2 + \frac{1 + J^2}{2J}. \tag{9}$$

Решая уравнения (8) с учетом того, что усредненный по времени импульс равен нулю

$$\langle J\rho\rangle = 0, \quad \langle\gamma\dot{z}\rangle = 0, \tag{10}$$

получим

$$J = J_0 - gJ_0^2\int(\mathbf{e}^2 - \langle\mathbf{e}^2\rangle)\,d\varphi, \tag{11а}$$

$$\rho = \frac{1}{J_0}\int\mathbf{e}\,d\varphi + g\left\{\mathbf{e} + \int d\varphi\left(\frac{e_0}{J_0^2}\int\mathbf{e}\,d\varphi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \mathbf{e}\int(\mathbf{e}^2 - \langle\mathbf{e}^2\rangle)\,d\varphi\right)\right\}, \tag{11б}$$

$$e_0 = -J_0^2\langle\mathbf{e}^2\rangle, \tag{11в}$$

$$J_0^2 = 1 + \frac{\langle\mathbf{e}^2\rangle}{k^2}, \tag{11г}$$

где k — модуль волнового вектора.

Как и следовало ожидать, сила, обусловленная постоянным электрическим полем $\mathbf{E}_0$, равна по величине и противоположна по направлению силе давления волны (см. [3]).

Вектор электрического поля плоской монохроматической волны с произвольной эллиптической поляризацией, распространяющейся вдоль оси z, можно записать в виде

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (e_1 + e_2)\cos k\varphi \\ (e_2 - e_1)\sin k\varphi \end{Bmatrix}, \quad e_1 \geqslant 0, \; e_2 \geqslant 0. \tag{12}$$

Введем безразмерные параметры

$$Q = \frac{q^2}{2m^2c^4k^2}\left(\langle \mathbf{E}^2\rangle + \langle \mathbf{H}^2\rangle\right) = \frac{e_1^2 + e_2^2}{k^2}, \tag{13}$$

$$\delta = \frac{2e_1e_2}{e_1^2 + e_2^2}.$$

Параметр Q прямо пропорционален плотности энергии электромагнитного поля и характеризует интенсивность волны. Параметр δ описывает поляризацию: $\delta=0$ отвечает круговой поляризации, $\delta=1$ — линейной, $0<\delta<1$ — эллиптической.

Подставляя (12), (13) в (11а, б) и учитывая (11в, г), получим

$$J = \sqrt{1+Q} - \frac{kr_0}{3} Q(1+Q)\,\delta \sin 2k\varphi, \tag{14а}$$

$$\rho = \frac{1}{k\sqrt{1+Q}} \left\{ \begin{Bmatrix} (e_1 + e_2)\sin k\varphi \\ -(e_2 - e_1)\cos k\varphi \end{Bmatrix} + \frac{2}{3} r_0 (1+Q) \begin{Bmatrix} (e_1 + e_2)\cos k\varphi \\ (e_2 - e_1)\sin k\varphi \end{Bmatrix} - \right.$$
$$\left. - \frac{Q\delta r_0}{18} \begin{Bmatrix} (e_1 + e_2)\cos 3k\varphi \\ (e_2 - e_1)\sin 3k\varphi \end{Bmatrix} \right\}. \tag{14б}$$

Поскольку заряд совершает периодическое движение, излучение имеет дискретный спектр, состоящий из частот, кратных основной частоте; при этом мощность, излучаемая в единицу телесного угла на l-ой гармонике основной частоты $\omega = kc$, имеет вид (см. [6]):

$$\frac{dP_l}{d\Omega} = \frac{q^2k^2cl^2}{(2\pi)^3} \left| \int_0^{2\pi/k} d\varphi \left[\frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} \times \mathbf{v} \right] \exp\{ilk(\varphi - (\mathbf{v} - \mathbf{n})\mathbf{r})\} \right|^2. \tag{15}$$

Так как $\rho = \dfrac{d\mathbf{r}_\perp}{d\varphi}$, то из (15) и (14б) ясно видно, что при $\delta \neq 0$ вперед излучается не только основная частота, но и ее третья гармоника. В случае круговой поляризации $\delta=0$, как показано в [2], вперед излучается лишь основная частота.

Условия применимости используемого приближения:

$$Q \ll \left(\frac{\lambda}{r_0}\right)^{2/3}, \quad \lambda \gg \frac{\hbar}{mc}. \tag{16а}$$

В частности, для оптических длин волн $\lambda \sim 10^{-5}$ см Q может достигать величины порядка 10^4—10^5, поэтому движение заряда может быть существенно релятивистским. Действительно, средняя энергия, отнесенная к энергии покоя,

$$\frac{\langle W\rangle}{mc^2} = \langle\gamma\rangle = \langle J\rangle + \langle \gamma \dot{z}\rangle = \langle J\rangle = \sqrt{1+Q} \tag{16б}$$

может достигать величины 10^2. Как видно из соотношения (16б), нерелятивистскому пределу отвечает $Q \ll 1$, что соответствует малой интенсивности волны.

Излучение электронов при прохождении через плазму интенсивной плоской волны

Перейдем от отдельного электрона к сплошной среде. Чтобы иметь возможность учитывать взаимодействие электронов с плазмой лишь посредством введения постоянного электрического поля $\mathbf{E}_0$, необходимо сделать предложение о низкой плотности:

$$n \ll k^3, \tag{17}$$

где n — плотность числа электронов. Поле излучения $\mathbf{E}$ описывается уравнением, непосредственно следующим из уравнений Максвелла:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \tau^2} - \nabla^2 \mathbf{E} = -4\pi \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \tau}, \tag{18}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость, $\mathbf{j} = qn\dot{\mathbf{r}}$ — плотность тока.

Благодаря условию (17), собственная плазменная частота

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi}{3} nc^2 r_0}$$

много меньше частоты волны, поэтому в выражении для ε ее можно опустить. Диэлектрическая проницаемость плазмы на первой и третьей гармонике основной частоты

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{4\pi n r_0}{k^2 \sqrt{1+Q}} - i \frac{8\pi}{3} r_0^2 (1+Q) \frac{n}{k}, \tag{19а}$$

$$\varepsilon_3 = 1 - \frac{4\pi n r_0}{(3k)^2} - i \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{n}{3k} \tag{19б}$$

является комплексным числом с модулем, мало отличающимся от единицы. Поскольку $|\varepsilon - 1| \ll 1$, сечения рассеяния просто выражаются через мнимую часть диэлектрической проницаемости:

$$\sigma_1 = -\frac{k}{n} Im\, \varepsilon_1, \quad \sigma_3 = -\frac{3k}{n} Im\, \varepsilon_3.$$

Для удобства вычислений будем пользоваться далее не тригонометрическими функциями, а экспонентами с комплексным аргументом (в силу линейности уравнений этот приём является законным). При этом физические величины будут определяться вещественной частью соответствующих выражений.

Пусть плазма занимает полупространство $z \geqslant 0$. Поскольку диэлектрическая проницаемость ε_1 (см. (19а)) имеет мнимую часть, интенсивность падающей волны Q убывает при $z \geqslant 0$:

$$Q = Q_0 e^{-2\alpha \int_0^z (1+Q)dz} = \frac{Q_0 e^{-2\alpha z}}{1 + Q_0 (1 - e^{-2\alpha z})}, \tag{20}$$

где Q_0 — интенсивность волны при $z = 0$, $\alpha = \frac{4\pi}{3} n r_0^2$. Электрическое поле распространяющейся в плазме волны

$$\mathbf{E}_1 = \frac{mc^2}{q}\begin{Bmatrix}(e_1+e_2)\\ -i(e_2-e_1)\end{Bmatrix}\exp\left\{-\alpha\int\limits_0^z (1+Q)\,dz + \right.$$

$$\left. + ik\left(\varphi + \int\limits_0^z \frac{2\pi n r_0}{k^2\sqrt{1+Q}}\,dz\right)\right\} \qquad (21)$$

также убывает экспоненциально.

Рассмотрим излучение вперед третьей гармоники. Вектор электрического поля $\mathbf{E}_3$ излучаемой волны лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{n}$, поэтому соответствующий вектор плотности тока полностью определяется последним членом в (14б) с учетом (19а). В этом случае из уравнения (18) получим уравнение для $\mathbf{E}_3$:

$$\varepsilon_3\frac{\partial^2\mathbf{E}_3}{\partial\tau^2} - \nabla^2\mathbf{E}_3 = \frac{2\pi}{3}nqQ_0\,\delta\, r_0 k\begin{Bmatrix} i\,(e_1+e_2)\\ (e_2-e_1)\end{Bmatrix}\times$$

$$\times\exp\left\{-3\alpha\int\limits_0^z (1+Q)\,dz + 3ik\varphi + \int\limits_0^z \frac{6\pi n r_0}{k^2\sqrt{1+Q}}\,dz\right\}. \qquad (22)$$

Обозначим правую часть через $\mathbf{f}(z)e^{3ik\tau}$. Тогда решение уравнения (22) с граничными условиями

$$\mathbf{E}_3(z=0)=0$$

имеет вид

$$\mathbf{E}_3 = \left(\mathbf{A}_1(z)\,e^{3i\sqrt{\varepsilon_3}\,kz} + \mathbf{A}_2(z)\,e^{-3i\sqrt{\varepsilon_3}\,kz}\right)e^{3ik\tau}, \qquad (23)$$

где

$$\mathbf{A}_1(z) = \frac{i}{6k\sqrt{\varepsilon_3}}\int\limits_0^z \mathbf{f}(z)\,e^{-3i\sqrt{\varepsilon_3}kz}\,dz,$$

$$(24)$$

$$\mathbf{A}_2(z) = \frac{-i}{6k\sqrt{\varepsilon_3}}\int\limits_0^z \mathbf{f}(z)\,e^{3i\sqrt{\varepsilon_3}kz}\,dz.$$

Формула (23) дает решение уравнения (22) в квадратурах. Интегралы (24) в конечном виде не вычисляются. Однако они позволяют сделать оценку амплитуды третьей гармоники E_3.

При $z \gg \frac{1}{\alpha}$ волна, имеющая основную частоту $\omega = ck$, становится слабой ($Q \ll 1$), и генерация третьей гармоники прекращается. При этом амплитуда как первой, так и третьей гармоники затухает по закону

$$E_{1,3} \sim e^{-\alpha z},$$

и отношение амплитуд равно

$$\frac{E_3}{E_1} = \frac{\delta}{6}kr_0Q_0\sqrt{1+Q_0}. \qquad (25)$$

Согласно (13) и (16а) $E_3/E_1 \ll 1$.

Из формул (19) видно, что при $Q = 80$ ($\sqrt{1+Q} = 9$) $\mathrm{Re}\,\varepsilon_1 = \mathrm{Re}\,\varepsilon_3$, следовательно, фазовые скорости первой и третьей гармоники равны.

Так как для обеих гармоник $|Im\varepsilon| \ll \mathrm{Re}(1-\varepsilon)$, при $Q \approx 80$ должна иметь место когерентная генерация третьей гармоники («резонанс»). Поскольку согласно (20), «резонансную» область проходила бы любая волна с $Q_0 > 80$, отношение амплитуд первой и третьей гармоники сильно различалось бы при $Q_0 > 80$ и $Q_0 < 80$. Однако этого не происходит, так как «длина когерентности» мала

$$\Delta z = \frac{6kr_0}{\alpha}$$

и вклад от «резонансной» области в отношение амплитуд $(Q_0 \geqslant 80)$

$$\Delta\left(\frac{E_3}{E_1}\right) = \frac{\delta\, kr_0}{2} Q, \ Q = 80$$

составляет лишь $\dfrac{240}{Q_0\sqrt{1+Q_0}} \ll \dfrac{1}{3}$ от величины (25), т. е. говорить о «резонансе» не приходится.

Автор благодарит Я. Б. Зельдовича и А. А. Старобинского за постоянный интерес к работе и плодотворные замечания, а также В. И. Григорьева за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sarachik E. S., Schappert G. T. Phys. Rev., **D 1**, 2738, 1970.
2. Зельдович Я. Б., Илларионов А. Ф. ЖЭТФ, **61**, 880, 1971.
3. Воронин В. С., Коломенский А. А. ЖЭТФ, **47**, 1528, 1964.
4. Gunn J. E., Ostriker J. P. Ap. J., **165**, 523, 1971.
5. Халилов В. Р., Холомай Б. В. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., **13**, № 4, 425, 1972.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М., 1965.

Поступила в редакцию
8.6 1973 г.

Кафедра
квантовой теории