Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1975

УДК 535.13 : 538.3

А. Б. КУКАНОВ, А. В. КОНСТАНТИНОВИЧ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СИЛЫ САМОДЕЙСТВИЯ ЛОРЕНЦА К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Излучение электрическим зарядом в ондуляторе при наличии прозрачного изотропного ферродиэлектрика

Решена задача об излучении релятивистского электрона в электрическом ондуляторе при наличии прозрачного изотропного ферродиэлектрика. Найдено угловое распределение энергии излучения и дан его анализ.

Теория излучения заряженных частиц в ондуляторе важна с точки зрения создания интенсивных источников электромагнитного излучения в области миллиметрового и субмиллиметрового диапазона [1, 2], а также возможных применений приборов такого рода в ядерной физике для измерения энергии быстрых заряженных частиц [3]. Теории излучения заряженных частиц в ондуляторах посвящен ряд исследований [2—11].

Моц [3] впервые указал на возможность использования излучения в ондуляторах для измерения энергии частиц. Эта идея была развита в работах [7—9], в которых исследованы возможности использования рентгеновского и более жесткого излучения в ондуляторах для идентификации и измерения энергии сверхбыстрых заряженных частиц. В них был исследован спектральный состав излучения. Здесь хотим найти угловое распределение полной (за период) энергии излучения заряженной частицы в электрическом ондуляторе при наличии прозрачной изотропной среды — ферродиэлектрика.

Считаем, что заряженная частица движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ — единичный вектор вдоль оси z) в поперечном электростатическом поле

$$E_x^{\text{ext}} = E_0 \sin\frac{2\pi z}{l}, \quad E_y^{\text{ext}} = E_z^{\text{ext}} = 0, \quad E_0,\ l — \text{const}. \tag{1}$$

Прозрачный изотропный ферродиэлектрик характеризуется диэлектрической и магнитной приницаемостями $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ и $\mu = \mu(\omega)$.

Из уравнений движения

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = e\mathbf{E}^{\text{ext}}, \quad \mathbf{P} = \frac{\mathscr{E}}{c^2}\mathbf{v} \tag{2}$$

и начальных условий $x=y=z=0$ при $t=0$ в приближении постоянства энергии частицы [4, 7] находим следующий закон ее движения:

$$x=-x_0\sin\omega_0 t,\quad y=0,\quad z=v_0 t,\tag{3}$$

где

$$\omega_0=\frac{2\pi v_0}{l},\quad x_0=\frac{eE_0}{\mathscr{E}}\left(\frac{c}{\omega_0}\right)^2,\quad \mathscr{E}=c\sqrt{p^2+m_0^2c^2},$$

P — импульс частицы, e и m_0 — ее заряд и масса покоя, c — скорость света в вакууме, $\dfrac{\mathscr{E}}{m_0c^2}\gg 1$.

Потери энергии зарядом в ондуляторе за время $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ определяем по формуле

$$W=-\int_0^T dt\int \mathbf{j}(\mathbf{r},t)\,\mathbf{E}_s(\mathbf{r},t)\,d\mathbf{r},\tag{4}$$

где $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ — плотность тока, $\mathbf{E}_s(\mathbf{r},t)$ должно быть определено согласно [12] с помощью полуразности запаздывающих и опережающих потенциалов.

Формула (4) дает работу силы самодействия Лоренца за период T и определяет энергетические потери частицы за этот промежуток времени. В дальнейшем нас будут интересовать только потери энергии заряженной частицей на излучение. Используя, как обычно, метод разложения напряженностей полей в интегралы Фурье и вводя волновой вектор $\mathbf{k}=\{k\sin\theta\cos\varphi;\ k\sin\theta\sin\varphi;\ k\cos\theta\}$, найдем после стандартных вычислений следующее выражение для спектрально-углового распределения полной (за период T) энергии излучения:

$$W=\frac{e^2}{c^2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\mu(\omega)\,\omega^2d\omega}{c'}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\cdot J_\nu^2\left(\frac{\omega x_0\sin\theta\cos\varphi}{c'}\right)\times$$
$$\times\left\{\left(\frac{\nu\omega_0c'}{\omega\sin\theta\cos\varphi}\right)^2+(v_0^2-c'^2)\right\}\delta\left(\omega_0\nu+\frac{\omega v_0}{c'}\cos\theta-\omega\right).\tag{5}$$

Здесь мы ввели обозначения $c'=\dfrac{c}{n}$, $n=n(\omega)=\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$. Полагая в (5) $E_0=0$, получим спектрально-угловое распределение энергии излучения Вавилова — Черенкова:

$$W^{\text{вч}}=\frac{e^2}{c^2}\left(\frac{T}{v_0}\right)\int_0^{\infty}\mu(\omega)\,\omega d\omega\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\,(v_0^2-c'^2)\,\delta\left(\frac{c'}{v_0}-\cos\theta\right).\tag{6}$$

Интегрируя в (6) по θ, найдем результат [13, 14], который при $\mu=1$ переходит в известную формулу И. Е. Тамма и И. М. Франка.

Формула (5) может быть разбита на два слагаемых: первое слагаемое, обязанное нулевой гармонике, и второе слагаемое, содержащее сумму всех остальных гармоник. После интегрирования по частоте ω это второе слагаемое может быть записано в виде

$$W=\frac{e^2}{c^2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\,\frac{\mu(\omega_\nu)\,\omega_\nu^2\,J_\nu^2(x_\nu)}{c'(\omega_\nu)\left|\dfrac{d}{d\omega}\left(\dfrac{\omega v_0}{c'}\right)\cos\theta-1\right|_{\omega=\omega_\nu}}\times$$
$$\times\left\{\left(\frac{\nu\omega_0c'(\omega_\nu)}{\omega_\nu\sin\theta\cos\varphi}\right)^2+(v_0^2-c'^2(\omega_\nu))\right\}.\tag{7}$$

Здесь

$$\omega_\nu = \frac{\nu\omega_0}{\left|1 - \frac{v_0 \cos\theta}{c'(\omega_\nu)}\right|}, \quad x_\nu = \frac{\omega_\nu x_0 \sin\theta\cos\varphi}{c'(\omega_\nu)}. \tag{8}$$

Из требования $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$ получаем для ν-той гармоники излучения интервал частот $\Delta\omega_\nu$, границы которого определяются из решения уравнения

$$\omega\left(1 - \frac{v_0}{c'}\cos\theta\right) - \nu\omega_0 = 0. \tag{9}$$

В случае вакуума получаем условия (2) первой работы [7].

Слагаемое в (5), обязанное нулевой гармонике при $v_0 > \frac{c}{n(\omega)}$, характеризуется непрерывным спектром, естественно обрезающимся при частотах, когда $\frac{v_0 n(\omega)}{c} = 1$. Если $v_0 < \frac{c}{n(\omega)}$ (что имеет место, в частности, в вакууме), это слагаемое обращается в нуль вследствие невозможности равенства нулю аргумента дельта-функции ни при каких углах θ. При

$$n = \mathrm{const} \text{ и } \frac{|x_\nu|}{\nu} < 1 \tag{10}$$

формула (7) допускает суммирование по гармоникам, так как соответствующий ряд Каптейна сходится. Мы получаем следующий результат:

$$W = \frac{e^2}{c^2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)\left(\frac{\mu x_0^2\omega_0^4}{16c'}\right)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \cdot \{(1 - \beta_z'\cos\theta)^2 +$$

$$+ (\beta_z'^2 - 1)\sin^2\theta\cos^2\varphi\} \frac{4(1 - \beta_z'\cos\theta)^2 + (\beta_x'\sin\theta\cos\varphi)^2}{[(1 - \beta_z'\cos\theta)^2 - (\beta_x'\sin\theta\cos\varphi)^2]^{7/2}}. \tag{11}$$

При соблюдении неравенства (10) выражение под знаком радикала в формуле (11) положительно.

Проинтегрируем формулу (11) по углу θ. Мы получим

$$W = \frac{e^2}{c^2}\frac{\mu x_0^2\omega_0^4}{12c'(1 - \beta_z'^2)}\left(\frac{T}{2\pi}\right)\int_0^{2\pi}\frac{M(\varphi)\,d\varphi}{(1 - \beta_z'^2 - \beta_x'^2\cos^2\varphi)^3}.$$

$$M(\varphi) = \beta_x'^4\cos^4\varphi - [4(1 - \beta_z'^2)^2 + 3(1 - \beta_z'^2)\beta_x'^2]\cos^2\varphi + 6(1 - \beta_z'^2)^2. \tag{12}$$

$$\beta_x' = \frac{x_0\omega_0}{c'}, \quad \beta_z' = \frac{v_0}{c'}. \tag{13}$$

Из формул (12) — (13) видно, что для исследования распределения энергии по углу φ достаточно его исследовать в интервале углов $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Имеем, в частности,

$$\left(\frac{dW(\varphi)}{d\varphi}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \sim \frac{6}{(1 - \beta_z'^2)^2}, \quad \left(\frac{dW(\varphi)}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} \sim \frac{(1 - \beta_z'^2) + (1 - \beta_x'^2 - \beta_z'^2)}{(1 - \beta_z'^2)(1 - \beta_x'^2 - \beta_z'^2)^2}.$$

Найдем распределение энергии излучения по углу θ:

$$W = \frac{e^2}{c^2}\frac{\mu x_0^2\omega_0^4}{12c'}\left(\frac{T}{2\pi}\right)\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{a_0^{3/2}}\{E(8\chi^3+5\chi^2+6\chi)+$$

$$+K(-4\chi^2-3\chi)+q_0[E(-8\chi^3+5\chi^2+\chi)+K(4\chi^2-2\chi)]\}. \quad (14)$$

$$K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}}, \quad E = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}\,d\varphi \quad (15)$$

полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

$$k^2 = \frac{b_0}{a_0}, \ \chi^{-1} = k'^2 = 1-k^2, \ a_0 = (1-\beta_z'\cos\theta)^2, \ b_0 = (\beta_x'\sin\theta)^2, \quad (16)$$

$$q_0 = \frac{1-\beta_z'^2}{\beta_x'^2}. \quad (17)$$

Из (14)—(17) видно, что излучение релятивистской частицы происходит главным образом вперед вдоль направления ее движения, причем

$$\frac{\left(\dfrac{dW(\theta)}{d\cos\theta}\right)_{\theta=0}}{\left(\dfrac{dW(\theta)}{d\cos\theta}\right)_{\theta=\pi}} = \frac{(1+\beta_z')^3}{(1-\beta_z')^3}.$$

Для глобальной (за период T) энергии излучения получаем формулу

$$W = \frac{T}{4}\frac{\mu e^2 x_0^2\omega_0^4}{c^2 c'}(1-\beta_z'^2)^{-\frac{1}{2}}\left\{(1-\beta_z'^2)^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times(1-\beta_x'^2-\beta_z'^2)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(1-\beta_x'^2-\beta_z'^2)^{-\frac{3}{2}}\right\}. \quad (18)$$

Видим, что выражение (18) действительно, если

$$\beta_x'^2+\beta_z'^2<1. \quad (19)$$

Результаты (11)—(19) получены нами также на основе обобщения на случай среды формулы (73) и (11) монографии [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. В сб.: «Миллиметровые и субмиллиметровые волны». М., 1959.
2. Гинзбург В. Л. «Изв. АН СССР», сер. физич., 11, 165, 1947.
3. Motz H. «J. Appl. Phys.», 22, No. 5, 527, 1951.
4. Combe R. Feix M. «C. r. Acad. Sci.», 237, 1318, 1953.
5. Матвеев А. Н. Кандидатская диссертация. МГУ, 1954.
6. Болотовский Б. М., Воскресенский Г. В. «Успехи физических наук», 94, 377, 1968.
7. Корхмазян Н. А. «Изв. АН Арм. ССР», физика, № 5, 287, 1970; № 5, 418, 1970.
8. Корхмазян Н. А., Элбакян С. С. «Изв. АН АрмССР», физика, № 6, 7, 1971.
9. Корхмазян Н. А., Элбакян С. С. ДАН СССР, 203, № 4, 791, 1972.
10. Алферов Д. Ф., Башмаков Ю. А., Бессонов Е. Г. Препринт ФИАН, № 23, 1972; препринт, № 92, 1974.

11. Багров В. Г. Тезисы конференции по электронным ускорителям. Томск, 1972.
12. Dirac P. A. M. «Proc. Roy. Soc.», A167, 148, 1938.
13. Ситенко А. Г. ЖТФ, 23, 2200, 1953.
14. Иваненко Д. Д., Цытович В. Н. ЖЭТФ, 28, 291, 1955.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1960.

Поступила в редакцию
24.4 1974 г.

Кафедра
теоретической физики