Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1975

УДК 537.011

Е. Н. ЕПИХИН

ДВИЖЕНИЕ ПРОБНОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ В ЛАГРАНЖЕВОМ ФОРМАЛИЗМЕ

Исследуются метрические и канонические законы сохранения для лагранжевой функции частиц со спином. На основе метрических соотношений теоремы Нётер получен сингулярный тензор энергии-импульса Тульчиева для вращающейся частицы.

Введение

Уравнения движения вращающейся пробной частицы в ОТО получил Папапетру [1], используя метод Мафиссона [2]. Основным недостатком метода Мафиссона — Папапетру является нековариантность. Указанную трудность удалось преодолеть Тульчиеву [3] ценой введения сингулярной плотности тензора энергии-импульса и использования формальных операций с δ-функцией.

Дальнейшим шагом в исследовании уравнений движения вращающихся пробных частиц явилось построение лагранжевой функции, что сделал Бартрум [4]. Однако исследование лагранжевой функции с помощью теоремы Нётер не было выполнено.

Теорема Нётер дает возможность проследить более последовательно связь между уравнениями Папапетру и уравнениями, получаемыми вариационным методом из лагранжевой функции, одновременно обнаруживается связь подхода Тульчиева с лагранжевым формализмом. С помощью теоремы Нётер можно определить также первые интегралы движения и указать их физический смысл как энергии, импульса, момента и пр.

Лагранжева функция и уравнения движения

Для вывода уравнений движения пробной частицы со спином вариационным методом будем использовать лагранжеву функцию, аналогичную принятой в работе [4],

$$L = L\,(u^{\alpha};\ \dot{u}^{\alpha};\ g_{(\alpha)\mu};\ \omega_{\mu\nu};\ m_A;\ \dot{m}_A;\ g_{\mu\nu};\ A_B), \tag{1}$$

причем интеграл действия для частицы имеет вид

$$S = \int L ds. \tag{2}$$

Здесь s — собственное время (натуральный параметр), $u^\alpha = \frac{dy^\alpha(s)}{ds}$ — скорость частицы ($u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} = 1$), m_A — моменты плотности массы частицы, $g_{\mu\nu}$ — метрическое поле, A_B — внешнее поле, $g_{(\alpha)\mu}$ — тетрада, жестко связанная с частицей и характеризующая «ориентацию» частицы в пространстве, $\omega_{\mu\nu} = -\dot{g}_{(\alpha)\mu} g^{(\alpha)}{}_\nu$ — угловая скорость вращения тетрады; точкой обозначена ковариантная производная по параметру на мировой линии частицы (в данном случае — по собственному времени). Отметим, что лагранжева функция при преобразовании координат ведет себя как скаляр, т. е.

$$L|_\mu{}^\nu = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} u^\nu + \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^\mu} \dot{u}^\nu - \frac{\partial L}{\partial g_{(\alpha)\nu}} g_{(\alpha)\mu} - 2\frac{\partial L}{\partial \omega_{\rho\nu}} \omega_{\rho\mu} +$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial m_A} m_A|_\mu{}^\nu + \frac{\partial L}{\partial \dot{m}_A} \dot{m}_A|_\mu{}^\nu - 2\frac{\partial L}{\partial g_{\rho\nu}} g_{\rho\mu} + \frac{\partial L}{\partial A_B} a_B|_\mu{}^\nu = 0, \tag{3}$$

где

$$L'(x') - L(x) = L|_\mu{}^\nu \xi^\mu{}_{,\nu}; \quad x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu \tag{4}$$

(величины $a_B|_\mu{}^\nu$ и т. д. определяются аналогично (4); см. [5]).

Проварьируем действие (2) по координатам частицы δy^μ, по ориентации тетрады $\delta g_{(\alpha)\mu} = -\delta\theta^\nu_{\mu\cdot} g_{(\alpha)\nu}$ ($\delta\theta_{\mu\nu} = -\delta\theta_{\nu\mu}$, так как частица поворачивается как целое), по моментам плотности массы δm_A. При варьировании необходимо учесть вариации внешнего и метрического полей, обусловленные варьированием координаты частицы, а также помнить о неголономности натурального параметра ($\delta ds \neq 0$). Введем следующие обозначения:

$$S^{\mu\nu} = 2\frac{\partial L}{\partial \omega_{\mu\nu}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_\mu} u^\nu + \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_\nu} u^\mu + 2\frac{\partial L}{\partial \dot{m}_A} m_A|_\beta{}^{[\mu} g^{\nu]\beta}; \tag{5}$$

$$P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - \frac{D}{ds} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^\alpha} - \tilde{m} u_\alpha, \tag{6}$$

где

$$\tilde{m} = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^\alpha} \dot{u}^\alpha + \left(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - \frac{D}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^\alpha} \right) u^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \omega_{\mu\nu}} \omega_{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{m}_A} \dot{m}_A - L, \tag{7}$$

$$A^{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(A^{\mu\nu} - A^{\nu\mu}), \quad A^{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(A^{\mu\nu} + A^{\nu\mu}).$$

При исследовании лагранжевой функции с помощью теоремы Нётер будет показано, что P_α — импульс частицы, а $S^{\mu\nu}$ — спин частицы. При учете свойства лагранжевой функции (3) варьирование действия (2) дает следующие уравнения движения:

$$\frac{\partial L}{\partial m_A} - \frac{D}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{m}_A} = 0, \tag{8}$$

$$-\frac{D}{ds} \frac{\partial L}{\partial \omega_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial \omega_{\mu\rho}} \omega_{\rho\cdot}{}^\nu - \frac{\partial L}{\partial \omega_{\nu\rho}} \omega_{\rho\cdot}{}^\mu - \frac{\partial L}{\partial g_{(\alpha)[\mu}} g_{(\alpha)}{}^{\nu]} = 0, \tag{9}$$

$$-\frac{D}{ds} P_\alpha + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} u^\lambda R_{\mu\nu\lambda\alpha} + \frac{\partial L}{\partial A_B} A_{B;\alpha} = 0, \tag{10}$$

где $R_{\mu\nu\lambda\alpha}$ — тензор Римана — Кристоффеля. Отметим, что вдоль мировой линии можно вводить не только параметр s, характеризующий собственное время частицы, но и параметр, обладающий другими свойствами, например, не зависящий от координат, т. е. $\left[\frac{d}{dt}, \delta\right] = 0$. Такой (голономный) параметр t используется в работе Бартрума [4]. Использование голономного параметра упрощает вычисления.

Основное соотношение теоремы Нётер

Теорема Нётер приводит к двум типам соотношений: метрическим и каноническим. Первые следуют из сохранений метрического тензора энергии-импульса, вторые же приводят к первым интегралам движения, которым придается смысл энергии, импульса, момента и пр. Теорема Нётер в механике имеет ряд особенностей по сравнению с теорией поля (см. [5, 6]). Во-вторых, для механических величин невозможно построить операцию типа дифференциала Ли, так как характеристики частицы заданы лишь вдоль одной мировой линии. Но в силу скалярности лагранжевой функции сравнение механических величин в разных точках можно проводить тензорным образом. Во-вторых, метрические соотношения распадаются на уравнения для импульса, момента и пр., что соответствует сохранению плотности метрического тензора энергии-импульса в теории поля.

При преобразовании координат $x^\alpha \to x^\alpha + \xi^\alpha$ ввиду независимости действия от их выбора имеет место равенство

$$L' \frac{ds'}{ds} - L = 0, \tag{11}$$

где штрихом обозначены величины в новой координатной системе.

Используя явную зависимость лагранжевой функции от полей и характеристик частицы и учитывая свойство (3), из (11) получим

$$\{(8) \cdot m_A|_\mu{}^\nu \xi^\mu{}_{,\nu} + (9) \cdot \xi_{\nu;\mu} + (10) \cdot \xi^\alpha\} + \frac{d}{ds}\left[P_\alpha \xi^\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^\beta} b^\beta_\alpha u^\nu \xi^\alpha{}_{;\nu} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial L}{\partial \omega_{\mu\nu}} \xi_{\nu;\mu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{m}_A} m_A|_\mu{}^\nu \xi^\mu{}_{;\nu}\right] + \frac{\partial L}{\partial A_B}(a_B|_\mu{}^\nu \xi^\mu{}_{;\nu} -$$

$$- A_{B;\mu} \xi^\mu) - \tau^{\alpha\beta} \xi_{\alpha;\beta} - \tau^{\gamma\alpha\beta} \xi_{\alpha;\beta;\gamma} = 0, \tag{12}$$

где

$$\tau^{\alpha\beta} = 2 \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} + L u^\alpha u^\beta; \tag{13}$$

$$b_\alpha{}^\beta = u_\alpha u^\beta - \delta_\alpha{}^\beta;$$

$$\tau^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(S^{\lambda\mu} u^\nu + S^{\lambda\nu} u^\mu + 2 \frac{\partial L}{\partial \dot{m}_A} m_A|^{(\mu\nu)} u^\lambda + 2 \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_{(\mu}} u^{\nu)} u^\lambda\right). \tag{14}$$

Заметим, что $\tau^{\lambda\mu\nu} \xi_{\mu;\nu;\lambda} \overset{\mathrm{Def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}} D_L \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, где D_L — дифференциал Ли (для полевых величин он, конечно, существует); отсюда следует (14).

Метрические соотношения

Перейдем к метрическим соотношениям, которые следуют из основного соотношения теоремы Нётер в форме (12). Полагая, что уравнения движения удовлетворены, внешнее поле отсутствует, вектор ξ^α на границе равен нулю, и вводя δ-функцию, получим метрический закон сохранения:

$$\int \left(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\right)_{;\nu} \xi_\mu (dx) = 0, \tag{15}$$

где

$$\left(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}\right) = \int ds \left[\tau^{\mu\nu}(s)\,\delta(x - y(s)) - \frac{D}{dx^\lambda}\left(\tau^{\lambda\mu\nu}(s)\,\delta(x - y(s))\right)\right]. \tag{16}$$

Интересно, что эти же выражения ((15) и (16)) использовал Тульчиев [3] при выводе уравнений Папапетру. Тем самым мы нашли, что подходы Бартрума [4] и Тульчиева [3] взаимно связаны через метрические соотношения теоремы Нётер.

Рассмотрим метрические соотношения в механике, не переходя к теории поля. Для этого представим тензор $\tau^{\lambda\mu\nu}$ так же как в работе [3]:

$$\tau^{\varkappa\mu\nu} = n^{\varkappa\mu\nu} + \frac{1}{2}\,{}^T S^{\varkappa\mu} u^\nu + \frac{1}{2}\,{}^T S^{\varkappa\nu} u^\mu + q^{\mu\nu} u^\varkappa, \tag{17}$$

где

$$q^{\mu\nu} = \tau^{\varkappa\mu\nu} u_\varkappa, \quad n^{\varkappa\mu\nu} = -\tau^{\gamma\alpha\beta}\, b^\varkappa_\gamma\, b^\mu_\alpha\, b^\nu_\beta,$$

$${}^T S^{\mu\nu} = 2\tau^{\gamma\alpha\beta}\, b^\mu_\gamma\, b^\nu_\alpha u_\beta - \tau^{\gamma\alpha\beta}\, b^\mu_\gamma u_\alpha u_\beta u^\nu + \tau^{\gamma\alpha\beta}\, b^\nu_\gamma u_\alpha u_\beta u^\mu.$$

Далее, если уравнения движения удовлетворены, получим, подставляя (17) в (12),

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Bigg[& P_\alpha \xi^\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot u^\beta}\, b^\beta_\alpha u^\gamma \xi^\alpha{}_{;\gamma} + \frac{\partial L}{\partial \omega_{\mu\nu}}\, \xi_{\nu;\mu} + \frac{\partial L}{\partial \dot m_A}\, m_A|_\mu{}^\nu\, \xi^\mu{}_{;\nu} - \\ & - \left(q^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\,{}^T S^{\beta\alpha}\right) \xi_{\alpha;\beta} - {}^T P_\alpha\, \xi^\alpha \Bigg] - \left(n^{\gamma\alpha\beta} + \frac{1}{2}\,{}^T S^{\gamma\beta} u^\alpha\right) \xi_{\alpha;(\beta;\gamma)} + \\ & + \left(\tau^{\alpha\beta} - \frac{\partial L}{\partial A_B}\, a_B|^{\alpha\beta} - \dot q^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,{}^T \dot S^{\beta\alpha}\right) b^\gamma_\beta\, \xi_{\alpha;\gamma} + \Bigg\{ \frac{D}{ds}\,{}^T P^\alpha - \\ & - \frac{1}{2}\,{}^T S^{\varkappa\nu} u^\mu R^\alpha_{\cdot\mu\nu\varkappa} - \frac{1}{2}\, n^{\gamma\rho\beta} R^\alpha_{\cdot\rho\beta\gamma} - \frac{\partial L}{\partial A_B}\, A_B{}^{;\alpha} \Bigg\} \xi_\alpha = 0, \end{aligned} \tag{18}$$

где

$${}^T P^\alpha = \left(\tau^{\alpha\beta} - \frac{\partial L}{\partial A_B}\, a_B|^{\alpha\beta} - \dot q^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,{}^T \dot S^{\beta\alpha}\right) u_\beta.$$

Из (17) ввиду произвольности вектора ξ^α следует

$$n^{\varkappa\mu\nu} = 0; \quad {}^T P_\alpha = P_\alpha; \quad {}^T S^{\mu\nu} = S^{\mu\nu}, \tag{19}$$

$$\frac{D}{ds} P_\alpha + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} u^\lambda R_{\alpha\lambda\mu\nu} - \frac{\partial L}{\partial A_B} A_{B;\alpha} = 0, \tag{20}$$

$$\dot S^{\alpha\beta} - P^\alpha u^\beta + P^\beta u^\alpha - 2\,\frac{\partial L}{\partial A_B}\, a_B|^{[\alpha\beta]} = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot u^\alpha}\, u^\alpha = 0; \tag{22}$$

$$P^{(\alpha}u^{\beta)} - \tau^{\alpha\beta} - \dot{q}^{\alpha\beta} - \frac{\partial L}{\partial A_B} a_B|^{(\alpha\beta)} = 0. \qquad (23)$$

Отметим, что свойство (22) является сильным, т. е. оно справедливо независимо от того, выполняются ли уравнения движения или нет.

Из уравнения (21) следует

$$P^{\alpha} = mu^{\alpha} + \left(\dot{S}^{\alpha\beta} - 2\frac{\partial L}{\partial A_B} a_B|^{[\alpha\beta]}\right) u_{\beta}, \qquad (24)$$

где $m = P_{\alpha}u^{\alpha}$. Тогда с учетом (24) уравнения движения (20) и (21) можно переписать в виде

$$\frac{D}{ds}\left[mu^{\alpha} + \left(\dot{S}^{\alpha\beta} - 2\frac{\partial L}{\partial A_B} a_B|^{[\alpha\beta]}\right)u_{\beta}\right] - $$

$$- \frac{1}{2} S^{\mu\nu}u^{\lambda}R_{\mu\nu\lambda}{}^{\alpha} - \frac{\partial L}{\partial A_B} A_B{}^{;\alpha} = 0; \qquad (25)$$

$$\left(\dot{S}^{\mu\nu} - 2\frac{\partial L}{\partial A_B} a_B|^{[\mu\nu]}\right) b^{\alpha}_{\mu} b^{\beta}_{\nu} = 0. \qquad (26)$$

Если внешнее поле отсутствует, то уравнения упрощаются:

$$\frac{D}{ds}[mu^{\alpha} + \dot{S}^{\alpha\beta}u_{\beta}] - \frac{1}{2} S^{\mu\nu}u^{\lambda}R_{\mu\nu\lambda}{}^{\alpha} = 0, \qquad (27)$$

$$\dot{S}^{\alpha\beta} b^{\mu}_{\alpha} b^{\nu}_{\beta} = 0 \text{ или } \dot{S}^{\mu\nu} - \dot{S}^{\mu\alpha}u_{\alpha}u^{\nu} + \dot{S}^{\nu\alpha}u_{\alpha}u^{\mu} = 0. \qquad (28)$$

В такой форме уравнения движения записаны в работах [1, 3, 4]. Отметим, что уравнения (27) и (28) содержат 6 независимых уравнений для 9 независимых величин. Для того чтобы система уравнений (27) и (28) была замкнутой, необходимо дополнить ее некоторыми условиями, физический смысл которых — фиксировать относительно частицы некоторую точку (например, центр масс), движение которой описывают эти уравнения. Приведем два возможных типа дополнительных условий:

$$S^{\alpha\beta}u_{\beta} = 0; \qquad (29)$$

$$S^{\alpha\beta}P_{\beta} = 0. \qquad (30)$$

Уравнения (27), (28) при условии (29) описывают центр масс частицы в системе, в которой 3-скорость равна нулю, а в случае использования (30) центр масс уже рассматривается в системе нулевого 3-импульса. Хотя условие (29) используется большинством авторов (например, [7, 8]), однако, как отмечает Диксон [9], это условие не выделяет единственного решения, дополнительное же требование (30), напротив, лишено этого недостатка.

При рассмотрении конкретных эффектов, связанных с вращением [7, 8, 10], необходимо учесть, что использование различных дополнительных условий приводит к разным физическим результатам, в принципе допуская тем самым экспериментальную проверку этих предположений.

Канонические законы сохранения

Рассмотрим случай, когда внешнее поле отсутствует. Тогда при удовлетворении уравнений движения соотношение (12) принимает вид

$$\frac{d}{ds}\left[P_\alpha\xi^\alpha+\frac{\partial L}{\partial\omega_{\mu\nu}}\xi_{\nu;\mu}+\frac{\partial L}{\partial\dot m_A}m_A|_\mu{}^\nu\xi^\mu{}_{;\nu}-\frac{\partial L}{\partial\dot u^\beta}b^\beta_\alpha u^\nu\xi^\alpha{}_{;\nu}\right]-$$

$$-\tau^{\alpha\beta}\xi_{\alpha;\beta}-\tau^{\gamma\alpha\beta}\xi_{\alpha;\beta;\gamma}=0. \tag{31}$$

Если учесть произвол $\tau^{\alpha\beta}$ и $\tau^{\gamma\alpha\beta}$, то для существования законов сохранения необходимо потребовать, чтобы

$$\xi_{\alpha;\beta}+\xi_{\beta;\alpha}=0. \tag{32}$$

Наиболее просто это можно показать для случая скалярной пробной частицы. Формула (32) есть не что иное, как уравнения Киллинга, решения которых для случая плоского пространства соответствуют группе Пуанкаре (см. [11, 12]). Итак, пусть ${}^K\xi^\alpha$ — вектор Киллинга, тогда ему соответствует некоторый первый интеграл движения:

$$\frac{d}{ds}\left(P_\alpha{}^K\xi^\alpha-\frac{1}{2}S^{\mu\nu}\,{}^K\xi_{\mu;\nu}\right)=0. \tag{33}$$

Из других соображений формула (33) была получена в работе [13].

При переходе к плоскому пространству имеем 10 независимых векторов Киллинга:

$${}^K\xi^\alpha=c^\alpha+a^\alpha{}_{;\beta}x^\beta, \tag{34}$$

где x^β — декартовы координаты, c^α, $a_{\alpha\beta}=-a_{\beta\alpha}$ — константы. В соответствии с этим из (33) имеем законы сохранения:

$$\frac{d}{ds}P_\alpha=0, \tag{35}$$

$$\frac{d}{ds}\left(2P^{[\alpha}x^{\beta]}-S^{\alpha\beta}\right)=0, \tag{36}$$

т. е. P_α — импульс частицы, $S^{\alpha\beta}$ — спин частицы.

Если пространство искривленное, то для рассматриваемого действия законы сохранения, вообще говоря, не существуют (может не оказаться ни одного вектора Киллинга). Чтобы выйти из этого затруднения, необходимо ввести в рассмотрение метрическое поле и считать частицы реальными (не пробными):

$$S=\int L\,ds+\int\mathcal{L}_g\,(dx), \tag{37}$$

где в L_g входят не только метрическое, но и прочие поля, которые, являясь источниками гравитационного поля, не содержатся в L. Для рассмотрения пробной частицы делается замена $L\to\varepsilon L$ ($\varepsilon\to0$ [14]. Уравнения движения для гравитационного поля в этом случае сингулярны, что придает им формальный характер:

$$\frac{\delta\mathcal{L}_g}{\delta g_{\mu\nu}}+\int ds\left[\tau^{\mu\nu}(s)\,\delta(x-y(s))-\frac{D}{dx^\lambda}\left(\tau^{\lambda\mu\nu}(s)\,\delta(x-y(s))\right)\right]=0. \tag{38}$$

Теорема Нётер применительно к действию (37) приводит к интегралу движения

$$\int dV\left[-t^\alpha{}_\sigma\xi^\sigma+M^{\alpha\tau}_\sigma\xi^\sigma{}_{,\tau}+N^{\alpha\tau\beta}_\sigma\xi^\sigma{}_{,\tau,\beta}\right]n_\alpha+$$

$$+\left[P_\alpha\xi^\alpha-\frac{1}{2}\left(S^{\mu\nu}+S^{\lambda\mu}u^\nu u_\lambda+S^{\lambda\nu}u^\mu u_\lambda\right)\xi_{\mu;\nu}\right]=\text{const}, \tag{39}$$

где $n_\alpha(y^\beta(s))=u_\alpha$;

t^{α}_{σ}, $M^{\alpha\tau}_{\sigma}$, $N^{\alpha\tau\beta}_{\sigma}$ см. [5]:

$$t^{\alpha}_{\sigma} = \frac{\delta \mathcal{L}_g}{\delta A_{B,\alpha}} A_{B,\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial A_{B,\alpha,\beta}} A_{B,\sigma,\beta} - \mathcal{L}_g \delta^{\alpha}_{\sigma},$$

$$M^{\alpha\tau}_{\sigma} = \frac{\delta \mathcal{L}_g}{\delta A_{B,\alpha}} a_B|_{\sigma}{}^{\tau} - \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial A_{B,\alpha,\tau}} A_{B,\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial A_{B,\alpha,\beta}} a_B|_{\sigma}{}^{\tau}{}_{,\beta},$$

$$N^{\alpha\tau\beta}_{\sigma} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial A_{B,\alpha,\beta}} a_B|_{\sigma}{}^{\tau} + \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial A_{B,\alpha,\tau}} a_B|_{\sigma}{}^{\beta}\right],$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_g}{\delta A_{B,\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial A_{B,\alpha}} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial A_{B,\alpha,}\,{}_{,}}\right)_{,\beta},$$

здесь в A_B включено и метрическое поле.

В заключение приношу глубокую благодарность Н. В. Мицкевичу за ценные советы и просмотр рукописи статьи, а также рецензенту за указание работы [15], в которой близкими методами рассматриваются законы сохранения вращающейся частицы в плоском пространстве с последующим введением слабых гравитационных полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Papapetrou A. Proc. Roy. Soc., **A202**, 248, 1951.
2. Mathisson M. Acta Phys. Polon., **6**, 163, 1937.
3. Tulczjew W. Acta Phys. Polon., **18**, 393, 1959.
4. Bartrum P. Proc. Roy. Soc., **A284**, 204, 1965.
5. Мицкевич Н. В. Физические поля в общей теории относительности. М., 1969.
6. Hill E. Rev. Mod. Phys., **23**, 253, 1951.
7. Corinaldesi E., Papapetrou A. Proc. Roy. Soc., **A202**, 259, 1951.
8. Pironi F. Acta Phys. Polon., **15**, 389, 1956.
9. Dixon W. G. Proc. Roy. Soc., **A314**, 499, 1970.
10. Епихин Е. Н., Пулидо И.. Мицкевич Н. В. Тезисы докладов третьей советской гравитационной конференции. Ереван, 1972, стр. 380.
11. Траутман А. Бюлл. Польск. Акад. наук., **4**, 665, 1956.
12. Траутман А. Бюлл. Польск. Акад. наук., **4**, 671, 1956.
13. Souriau J.-M. C. R. Acad. Sci., **271**, A 751, 1970.
14. Инфельд Л., Плебаньски Е. Движение и релятивизм. М., 1963.
15. Römer V. H., Westpfahl K. Ann. der Phys., **22**, 264, 1969.

Поступила в редакцию
20.3 1972 г.

Кафедра
теоретической физики