

В. В. АЛЕКСЕЕВ, А. М. ГУСЕВ, Т. Г. ДЕМЕНТЬЕВА

## К ВОПРОСУ О МОДЕЛИ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ В АНТАРКТИКЕ

Рассматривается образование системы вихрей в вязкой несжимаемой жидкости между двумя вращающимися с одинаковой угловой скоростью цилиндрами. Внутренний цилиндр находится при более низкой температуре. Исследована зависимость числа вихревых колец от критического числа Грассгофа. Изучаемая система может рассматриваться как модель горизонтального движения воздушных масс в Антарктике.

Изучение циркуляции атмосферы в Антарктике привлекает особое внимание исследователей. Такая заинтересованность Антарктикой не случайна, поскольку климат и погода этого района земного шара интересны не только сами по себе. Знание их закономерностей важно для понимания аналогичных по своей физической природе, но более сложных по конфигурации, крупномасштабных атмосферных процессов, протекающих в других областях земного шара.

Свободная конвекция может возникнуть в атмосфере, а также в любой другой среде при наличии в ней нагретых областей и относительно более холодном окружающем пространстве, при наличии теплового контраста температуры на подстилающей поверхности. Циркуляция в районе Антарктики относительно более проста для изучения, поскольку условия, определяющие ее, в этом районе земного шара являются более простыми и симметричными. Широтное различие температуры подстилающей поверхности, контраст температуры поверхностей ледяного материка и окружающих его водных пространств и поле силы Кориолиса являются симметричными относительно друг друга и относительно оси вращения Земли. Это и приводит к возникновению мощной и правильной циркуляции.

Точное теоретическое решение задач о свободной конвекции в атмосфере, особенно если учесть сложность и многообразие граничных условий, имеющих в природе, получить трудно. Поэтому задачи такого рода в основном пытались решать экспериментальным путем. Среди таких работ по исследованию циркуляции в Антарктике можно назвать работы А. М. Гусева [1—3], Т. В. Бончковской [4, 5], Хайда [6] и др.

Циркуляция в атмосфере существенно усложняется в результате действия силы Кориолиса и наличия поверхностей раздела, на которых могут образовываться волны большой высоты и протяженности.

При неустойчивом режиме эти волны разрушаются и превращаются в вихри с вертикальной осью. Именно с этим связывают исследователи циклогенез — образование подвижных циклонов и антициклонов. Непрерывная цепочка циклонов, разделенных гребнями повышенного давления, постоянно движется вокруг Антарктики; количество их изменяется. В работах [1—3] циклоны рассматривались как результат волновых процессов на поверхности холодного воздуха, стекающего с Антарктиды и образующего вокруг материка кольцевую поверхность раздела — антарктический фронт. В работах [4, 5] эта поверхность отчетливо прослеживается на первом этапе эксперимента, затем на ней возникают волны, быстро превращающиеся в вихри. В [6] и др. во вращающихся цилиндрических сосудах с различно нагретыми поверхностями внутреннего и внешнего цилиндров при различных режимах возникают следы концентрических потоков волн или вихрей.

В данной работе исследуется движение вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными коаксиальными цилиндрами, вращающимися с постоянной одинаковой угловой скоростью  $\Omega$  (см. рис. 1). Внешний цилиндр имеет постоянную температуру  $T_1=1$ , во внутреннем  $T_2=0$  (значения температуры даны в безразмерных единицах). Решение позволит теоретически оценить режим движения жидкости при экспериментах с цилиндрами, моделировать одну из сторон режима волн-вихрей, движущихся вокруг Антарктики, в частности найти зависимость количества циклонов в цепочке от числа Грассгофа.

Процесс конвективного движения жидкости в неподвижной системе координат описывается следующей системой термогидродинамических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{a}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T &= \chi\Delta T; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \\ \rho &= \rho(\rho, T), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость,  $T$  — температура,  $\mathbf{a}$  — центростремительное ускорение,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\chi$  — температуропроводность,  $p$  — давление жидкости.

В условиях механического равновесия температура и давление получаются в виде:

$$\begin{aligned} T_0(r) &= (T_2 - T_1) \ln \frac{r}{r_0} / \ln \frac{R_1}{r_0} + T_1, \\ P_0(r) &= \int \rho_0 \Omega^2 r dr. \end{aligned}$$

Ввиду сложности исследования общей трехмерной задачи решается стационарная двумерная линейная задача конвекции.

В этом случае уравнения (1) в безразмерной форме в приближении Бусинеска в полярной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla p &= \Delta \mathbf{v} - GrT, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \quad \frac{1}{\rho} \Delta T = \gamma v_r, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{r \ln \frac{R}{r_0}}$$

$G = \frac{\beta \Omega^2 (R - r_0)^4 (T_2 - T_1)}{\nu^2}$  — число Грассгофа,  $P = \frac{\nu}{\chi}$  — число Прандтля,  $v_r(r, \theta)$ ,  $v_\theta(r, \theta)$  — соответственно радиальная и зональная компоненты скорости,  $T(r, \theta)$  — отклонение температуры от равновесного значения,  $p(r, \theta)$  — избыточное давление жидкости.

Граничными условиями считаются условия непротекания и прилипания жидкости и равенство нулю отклонений температуры на стенках цилиндров). К этим условиям необходимо добавить условие непрерывности всех функций по углу:

$$v_r(r, \theta) = v_r(r, \theta + 2\pi),$$

$$v_\theta(r, \theta) = v_\theta(r, \theta + 2\pi),$$

$$T(r, \theta) = T(r, \theta + 2\pi).$$

Для получения зависимости между интегральными характеристиками системы (числа конвективных ячеек от критического числа Грассгофа) удобно использовать принцип наименьшего действия. Так как в системе (2) происходят диссипативные процессы, построить лагранжиан системы можно, лишь введя фиктивную систему, поглощающую тепловую энергию, выделяемую за счет вязких движений реальной системой. Фиктивную систему удобно выбрать таким образом, чтобы ее решения и решения реальной системы были связаны несложным групповым преобразованием.

Лагранжева функция для системы имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & v_r^* \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v_\theta^*}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - v_r \frac{\partial p^*}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial v_r^*}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} - \\ & - G\bar{R}(Tv_r^* - T^*v_r) + \frac{G\bar{R}}{P\gamma} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial T^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right), \end{aligned}$$

где  $\bar{R} = \frac{R + r_0}{2}$ .

Согласно принципу наименьшего действия уравнениями процесса будут уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \right)} = 0,$$

где  $q = (v, v^*, T, T^*)$ .

При дифференцировании по  $v^*$  и  $T^*$  получается система уравнений (2), при дифференцировании по  $v$  и  $T$  получается «сопряженная» система уравнений:

$$\nabla p^* = -\Delta v^* + GrT^*,$$

$$\frac{1}{r} \Delta T^* = -\gamma v_r^*, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} v^* = 0.$$

С помощью преобразования

$$r^* \rightarrow -r, \quad T^* \rightarrow -T \quad (4)$$

система (3) переходит в систему (2).

Граничные условия для «сопряженной» системы берем такие же, как и для реальной. Это позволит считать, что профили решений, найденные из линейных преобразований (2) и (3), совпадают с точностью до преобразования (4).

Пробные функции для решений системы возьмем в приближенном виде, основываясь на том, что вблизи критических чисел Грасгофа в стационарном случае вторичные конвективные течения имеют кольцевую форму. В этом случае профиль кольцевых течений можно приблизить, например, гармоническими функциями.

На рис. 1 изображено кольцо вихрей, возникающих при вращении цилиндров. Система координат выбрана так, как указано на этом рисунке. Из физических соображений функция  $v_r$  равна нулю на границах области при  $r=r_0$  и  $r=R$  и имеет экстремум по  $r$  приблизительно при  $r=\bar{R}$ . Этим условиям удовлетворяет следующая простая функция:

$$v_r \sim \sin \frac{\pi}{D} (r - r_0),$$

где  $D=R-r_0$ .

$v_r$  имеет экстремальные значения по  $\theta$  между вихрями и равна нулю на радиусах, проходящих через центры вихрей. Этим требованиям удовлетворяет функция

$$v_r \sim \cos \theta.$$

Амплитудное значение  $v_r$  должно убывать  $\sim \frac{1}{r}$ .

Резюмируя, пробную функцию  $v_r$  выбираем в виде

$$v_r = \frac{A}{r} \sin \frac{\pi}{D} (r - r_0) \cos \theta.$$

Эта функция записана для двух циклонов. При произвольном числе циклонов функция имеет вид

$$v_r = \frac{A}{r} \sin \frac{\pi}{D} (r - r_0) \cos n\theta.$$

В стационарном случае число вихрей должно быть четным, поэтому  $2n$  равно числу вихрей.

Аналогичные соображения позволяют написать пробные функции для  $v_\theta$ ,  $T$  и  $p$ :

$$v_\theta = \frac{B}{r} \sin \frac{2\pi}{D} (r - r_0) \sin n\theta \pm \Omega r,$$

$$T = \frac{C}{r} \sin \frac{\pi}{D} (r - r_0) \cos n\theta,$$

$$\rho = \frac{F}{r} \sin \frac{\pi}{D} (r - r_0) \cos n\theta.$$

Так как нас интересуют интегральные характеристики системы, можно считать, что ошибки в выборе пробных функций будут слабо сказываться на характере исследуемых зависимостей.

Это решение удовлетворяет условию несмешивания потоков между вихрями,

$$v_r|_{r=r_0} = v_r|_{r=R} = 0 \text{ — условию непротекания жидкости}$$

на границе и

$$v_\theta|_{r=r_0} = \Omega r_0, \quad v_\theta|_{r=R} = \Omega R \text{ — условию прилипания жидкости на стенках цилиндров.}$$

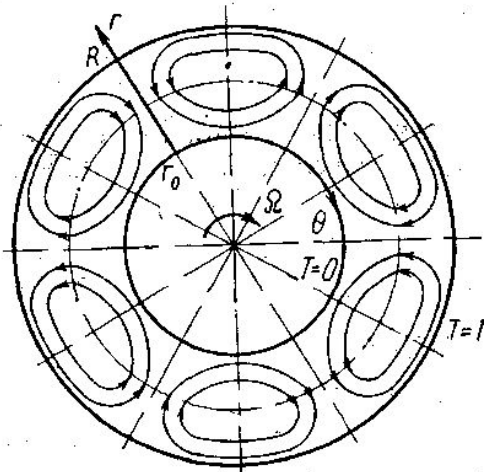


Рис. 1

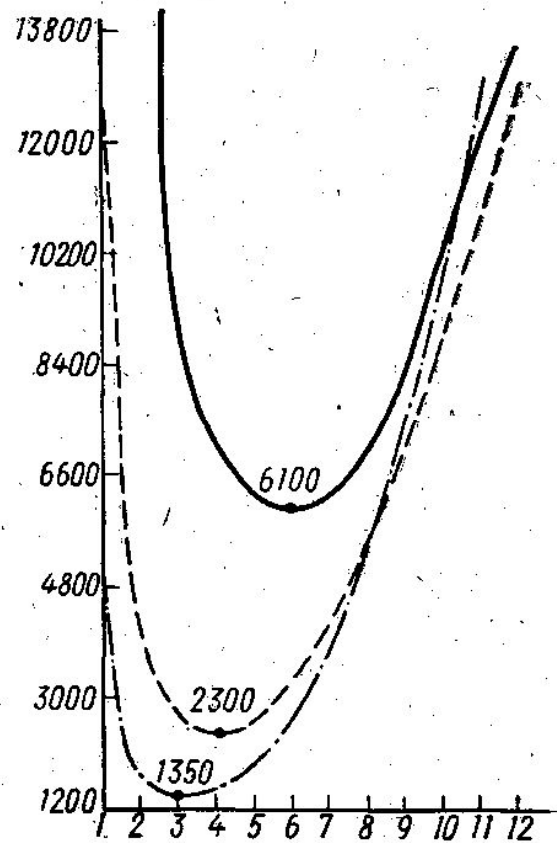


Рис. 2

Величинам, отмеченным звездочкой, соответствуют те же самые пробные функции, поскольку  $v^*$ ,  $T^*$  и  $v$ ,  $T$  удовлетворяют одним и тем же стационарным линейаризованным системам уравнений.

Поставим указанные пробные функции в лагранжиан (3) и воспользуемся принципом наименьшего действия для нахождения коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $F$ :

$$\delta S = \int \delta \mathcal{L} dr = 0.$$

Проварьировав лагранжиан по коэффициентам  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $F$  и проинтегрировав полученное выражение по  $r$ ,  $\theta$ , получаем следующую линейную алгебраическую однородную систему уравнений для нахождения коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $F$  (здесь  $\alpha = \frac{\pi}{D} (r - r_0)$ ):

$$\begin{aligned}
& \left( 2 \int_{r_0}^R \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} dr - \pi \int_{r_0}^R \frac{\sin 2\alpha}{r} dr \right) F + \left( \pi \int_{r_0}^R \frac{\sin 2\alpha}{r^2} dr - \pi^2 \int_{r_0}^R \frac{\cos^2 \alpha}{r} dr - \right. \\
& \left. - \int_{r_0}^R \frac{\sin^2 \alpha}{r^3} dr - n^2 \gamma \int_{r_0}^R \frac{\sin^2 \alpha}{r^3} dr \right) 2A + \left( -2G\bar{R} \int_{r_0}^R \frac{\sin^2 \alpha}{r} dr \right) C = 0, \\
& \left( 2n \int_{r_0}^R \frac{\sin 2\alpha \sin \alpha}{r^2} dr \right) F + \left( 2\pi \int_{r_0}^R \frac{\sin 4\alpha}{r^2} dr - 4\pi^2 \int_{r_0}^R \frac{\cos^2 2\alpha}{r} dr - \right. \\
& \left. - \int_{r_0}^R \frac{\sin^2 2\alpha}{r^3} dr - n^2 \int_{r_0}^R \frac{\sin^2 2\alpha}{r^3} dr \right) 2B = 0, \tag{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( -2G\bar{R} \int_{r_0}^R \frac{\sin^2 \alpha}{r} dr \right) A + \frac{G\bar{R}}{P} \left( \pi \int_{r_0}^R \frac{\sin 2\alpha}{r^2} dr - \pi^2 \int_{r_0}^R \frac{\cos^2 \alpha}{r} dr - \right. \\
& \left. - \int_{r_0}^R \frac{\sin^2 \alpha}{r^3} dr - n^2 \int_{r_0}^R \frac{\sin^2 \alpha}{r^3} dr \right) 2C = 0,
\end{aligned}$$

$$\left( 2 \int_{r_0}^R \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} dr - \pi \int_{r_0}^R \frac{\sin 2\alpha}{r} dr \right) A + \left( 2n \int_{r_0}^R \frac{\sin 2\alpha \sin \alpha}{r^2} dr \right) B = 0.$$

В этой системе произведено сокращение на  $\pi$  и учтено, что

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin n\theta d\theta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 n\theta d\theta = \pi.$$

Подсчет интегралов системы производился на машине «Мир» методом Симпсона. Были получены числовые значения этих интегралов для  $P=1$ :

$$1. r_0 = 1, \quad R = 1,5;$$

$$2. r_0 = 0,85, \quad R = 1,5;$$

$$3. r_0 = 0,75, \quad R = 1,5.$$

Зависимость числа Грассгофа от  $n$  для трех указанных размеров внутренней области имеет вид

$$G = 0,35n^4 + 46n^2 + 2600 + \frac{60000}{n^2},$$

$$G = 0,5n^4 + 34n^2 + 950 + \frac{11600}{n^2},$$

$$G = 0,64n^4 + 30n^2 + 560 + \frac{4500}{n^2}.$$

Система (5) имеет нетривиальное решение лишь в том случае, если ее определитель равен нулю. Это условие и позволяет нам сразу найти искомую зависимость между числом Грассгофа и количеством циркуляций.

Графики этой зависимости для указанных трех случаев представлены на рис. 2. Случаю 1 соответствует сплошная линия, случаю 2 — пунктирная и случаю 3 — штрих-пунктирная.

Каждая из кривых имеет минимум в точке  $n$ , которая показывает наиболее вероятное количество вихрей для данного размера области.

Из рис. 2 видно, что значение  $G_{\min}$  растет с увеличением внутреннего радиуса, т. е. с уменьшением толщины кольца. При этом происходит увеличение  $n$ , т. е. числа циклонов, при котором функция  $G(n)$  имеет минимум. Такая зависимость находится в удовлетворительном согласии с данными наблюдений, проведенных в Антарктиде.

По данным наблюдений [7—8], полученных в январе (летний месяц), широтное расстояние между внутренним и внешним радиусами области циклонов  $\sim 22^\circ$ , разность температур на границах области  $\sim 22^\circ\text{C}$ , количество циклонов равно 6. В зимнем месяце июле область действия циклонов сужается до  $18^\circ$ , перепад температур на границах  $\sim 40^\circ\text{C}$ , количество циклонов равно 7. Для весеннего месяца ноября происходит расширение кольца циклонов до  $\sim 26^\circ$ , разность температур на границах  $\sim 32^\circ\text{C}$ , количество циклонов уменьшается до 5.

Как видно из данных наблюдений, порядок волн-вихрей, полученный теоретически, хорошо согласуется с тем, что наблюдается в природе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев А. М. Труды НИУ Гидрометслужбы СССР, гидрология моря, вып. 1, 1946.
2. Гусев А. М. В сб.: «Моделирование явлений в атмосфере и гидросфере». М., 1962.
3. Гусев А. М. Основные итоги изучения Антарктики за 10 лет. Доклады всесоюзного совещания по изучению Антарктики. М., 1967.
4. Бончковская Т. В. В сб.: «Моделирование явлений в атмосфере и гидросфере». М., 1962.
5. Бончковская Т. В. В сб.: «Исследование теплообмена в атмосфере». М., 1964.
6. Hide R. Fluid models in geophysics. Washington, Johns Hopkins University, 1953.
7. Метеорологический бюллетень (ноябрь 1957). М., 1958.
8. Атлас Антарктики, т. 1. Главное управление геодезии и картографии МГ СССР, 1966.

Поступила в редакцию  
6.6 1972 г.

Кафедра  
физики моря и вод суши