Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1975

УДК 530.12:531.15

Л. С. КУЗЬМЕНКОВ

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ООРТА

Найдена релятивистская функция распределения гравитирующих частиц как функционал скоростей и метрического тензора, обладающего ротационной симметрией, а так же как функционал скоростей и гравитационного потенциала. Показано, что в пределе малых скоростей по сравнению со скоростью света формулы Оорта эллипсоидальной динамики Галактики оказываются зависящими от потенциала.

В [1] дан вывод стационарного эллипсоидального распределения скоростей частиц, впервые установленного Оортом [2], по результатам астрономических наблюдений за движением звезд в Галактике. В этой работе получено соответствующее релятивистское распределение с явной функциональной зависимостью от гравитационного потенциала и римановой метрики базисного подпространства пространства опорных элементов.

Равновесное распределение для вращающихся статистических систем как функционал метрики

Для статистических образований с цилиндрической симметрией базисного пространства в невращающейся системе отсчета метрический тензор имеет вид

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^1, x^3); \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3),$$
$$g_{0k} = 0; \quad (k = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$ — цилиндрические координаты.

Общековариантное уравнение непрерывности в пространстве опорных элементов в этом случае сводится к уравнению

$$p^k \frac{\partial f}{\partial x^k} + \frac{1}{2} p^{0^2} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} \frac{\partial f}{\partial p_3} \right) +$$
$$+ \frac{1}{2} p^k p^l \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^1} \frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^3} \frac{\partial f}{\partial p_3} \right) = 0. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (2) представляет собой множество функций распределения

$$f(x,\ p) = f(p_0,\ p_2), \tag{3}$$

где

$$p_0 = -mcu_0 = -mc\sqrt{g_{00}}\left(1 + \frac{g_{ln}}{g_{00}}\frac{\dot{x}^l\dot{x}^n}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$p_k = -mcu_k = -mc\frac{g_{kr}\dot{x}^r}{\sqrt{g_{00}}}\left(1 + \frac{g_{ln}}{g_{00}}\frac{\dot{x}^l\dot{x}^n}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

компоненты обобщенного 4-импульса ($\dot{x}^\alpha/c = dx^\alpha/dx^0$).

Для стационарного распределения гравитирующих частиц в каждой фиксированной точке системы имеют определенные значения компоненты тензора энергии-импульса

$$\int \dot{x}^a p_\beta f(x,\ p)\sqrt{-g}\,dp_1dp_2dp_3. \tag{5}$$

Поэтому в действительности класс функций (3) является более узким. Он состоит из функций, на множестве которых интеграл (5) остается неизменным. Функция распределения $f(p_0,\ p_2)$ из этого класса является равновесной, если на ней достигает максимального значения плотность энтропии

$$\int f\ln f\sqrt{-g}\,dp_1dp_2dp_3. \tag{6}$$

Вычислив функциональную вариацию [3] интеграла (6) при дополнительном условии неизменности тензора энергии-импульса (5) и полагая ее равной нулю, найдем

$$f(x,\ p) = A\exp\left[-\lambda^\alpha_\beta\dot{x}^\beta p_\alpha\right]. \tag{7}$$

Эта функция должна удовлетворять условию (3). Отсюда заключаем, что отличные от нуля множители Лагранжа равны

$$\lambda^0_0 = \text{const}; \qquad \lambda^2_0 = \text{const};$$

$$\lambda^0_k = \text{const}\cdot\frac{g_{2k}}{g_{00}}; \qquad \lambda^2_m = \text{const}\,\frac{g_{2m}}{g_{00}}. \tag{8}$$

Функция $p_0 = p_0(x^k,\ p_l)$ находится из условия

$$g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta = m^2c^2$$

и положительной определенности энергии частицы. В результате

$$f(x,\ p) = A\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\left[\sqrt{g_{00}(m^2c^2 - g^{km}p_kp_m)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \omega p_2 + \frac{\varkappa c p_2^2}{2\sqrt{g_{00}(m^2c^2 - g^{kl}p_kp_l)}}\right]\right\}, \tag{9}$$

где введены новые обозначения для постоянных.

Вследствие (4) имеем также

$$f(x,\ \dot{x}) = A\exp\left[-\frac{m}{\theta}\frac{g_{00}c^2 + \omega g_{2m}\dot{x}^m - \dfrac{\varkappa}{2g_{00}}\cdot g_{2m}\dot{x}^m g_{2l}\dot{x}^l}{\sqrt{g_{00} + g_{kl}\dfrac{\dot{x}^k\dot{x}^l}{c^2}}}\right]. \tag{10}$$

Мы получили равновесную функцию распределения для цилиндрически симметричных статистических образований в переменных x, p и x, $\dot{x}$. В обоих случаях распределение является функционалом метрического тензора пространства всевозможных пространственно-временных положений релятивистских гравитирующих частиц, которое мы будем называть также позиционным, или П-пространством[1].

Для сравнения функций (9) и (10) с нерелятивистскими необходимо иметь явное выражение метрики через гравитационный потенциал. Так как переменные x, $\dot{x}$ независимы, это выражение должно быть получено при всех $\dot{x}$ и любых значениях метрических коэффициентов.

Зависимость метрики П-пространства от гравитационного потенциала

По определению П-пространство невзаимодействующих релятивистских частиц изоморфно пространству Минковского. Пусть в этом пространстве включается взаимодействие между частицами посредством задания поля как дифференциально-геометрического объекта. Тогда мировые линии взаимодействующих частиц не будут более служить геодезическими пространства Минковского.

Найдем такой экземпляр риманова пространства, геодезические которого совпадают с мировыми линиями гравитирующих частиц. Для этого предположим, что для релятивистских гравитирующих частиц справедлив тот же принцип соответствия, что и для частиц с электромагнитным взаимодействием. Именно, потребуем, чтобы компоненты обобщенного 4-импульса p_α в каждой фиксированной точке П-пространства функционально переходили в свои нерелятивистские выражения в области $|x^e| \ll c$ касательного пространства.

Разлагая p_α в ряд Тейлора, находим из (4)

$$-cp_0 \cong mc^2 \sqrt{g_{00}} - \frac{m}{2} \frac{g_{km}}{\sqrt{g_{00}}} \dot{x}^m \dot{x}^k,$$

$$p_k \cong -m \frac{g_{km}}{\sqrt{g_{00}}} \dot{x}^m. \tag{11}$$

С другой стороны, соответствующие нерелятивистские формулы для энергии и импульса можно представить в виде [4]

$$E = mc^2 + m\Phi(x) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2),$$

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}, \quad p_z = m\dot{z}. \tag{12}$$

Приравнивая в (11) и (12) коэффициенты при одинаковых степенях $\dot{x}^e$, получаем

$$\sqrt{g_{00}} = \left(1 + \frac{\Phi(x)}{c^2}\right),$$

$$\frac{g_{km}}{\sqrt{g_{00}}} = -b_{km}, \tag{13}$$

[1] Термин предложен А. Л. Зельмановым.

где b_{ke} — метрический тензор евклидова пространства, отнесенный к цилиндрическим координатам.

Формулы (13) справедливы при любых, а не только малых скоростях частиц. Это видно из того, что при разложении вектора $p_\alpha(\dot{x}^k, x^l)$ по второму ряду аргументов функции координат $g_{\alpha\beta}$ оставались произвольными.

Окончательно интервал П-пространства, соответствующего условиям задачи, имеет вид

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)^2 dx^{0^2} - \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) b_{ke} dx^k dx^l. \tag{14}$$

Выражения для обобщенных импульсов в метрике (14) записываются формально как аналогичные выражения СТО, в которые вместо скорости света входит величина

$$\Lambda(x) = \sqrt{c^2 + \Phi(x)};$$

$$E = \frac{m\Lambda^2}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{\Lambda^2}}}, \qquad p_k = \frac{mv_k}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{\Lambda^2}}}$$

$$(v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2). \tag{15}$$

Если принять в качестве полевых уравнений в П-пространстве уравнения Эйнштейна, то гравитационный потенциал $\Phi(x)$ в формулах (14), (15) должен определяться из системы ковариантных статистических уравнений [5].

Явная зависимость релятивистского распределения Оорта от гравитационного потенциала

Подставляя в формулы (9) и (10) значения компонентов метрического тензора и обобщенного 4-импульса из (14) и (15), получим

$$f(x, p) = A \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\left[\sqrt{p^2\Lambda^2 + m^2\Lambda^4} - \omega p_2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varkappa c^2 p_2^2 / 2\sqrt{p^2\Lambda^2 + m^2\Lambda^4}\right]\right\}, \tag{16}$$

$$f(x, v) = A \exp\left[\frac{-m}{\theta\sqrt{1 - \frac{v^2}{\Lambda^2}}}\left(\Lambda^2 - \omega r v_\varphi + \frac{\varkappa}{2}\frac{c^2}{\Lambda^2} r^2 v_\varphi^2\right)\right]. \tag{17}$$

Это окончательные выражения для равновесной функции распределения релятивистских гравитирующих частиц в цилиндрически симметричном поле.

В области пространства скоростей $v^2 \ll c^2$ имеем приближенно

$$f(x, v) = A \exp\left[-\frac{m}{\theta}\left(c^2 + \Phi(x) + \frac{v^2}{2} - \omega r v_\varphi + \frac{\varkappa r^2 v_\varphi^2}{2\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)}\right)\right]. \tag{18}$$

Функция (18) может быть преобразована к виду

$$f(x, v) = A \exp\left\{-\frac{m}{\theta}\left[\frac{v_r^2 + v_z^2 + (1 + \alpha r^2)(v_\varphi - \overline{v}_\varphi)^2}{2} + \Phi(x) - \sigma(x)\right]\right\}, \tag{19}$$

где

$$\overline{v}_\varphi = \frac{\omega r}{1 + \alpha r^2}, \qquad \sigma = \frac{\omega^2 r^2}{2(1 + \alpha r^2)}, \tag{20}$$

$$\alpha = \frac{\varkappa}{\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)}. \tag{21}$$

Формулы (20) и (21) при $\alpha = \text{const}$ были получены Оортом. Однако из формулы (21) следует, что параметр жесткости вращения α [6] оказывается зависящим от потенциала. Такую же зависимость имеет и средняя круговая скорость вращения $\overline{v}_\varphi$.

Релятивистская поправка к формулам Оорта может быть обнаружена экспериментально путем сравнения данных для областей с большим градиентом потенциала в статистически неоднородных вращающихся звездных системах. Для однородных галактик в формулах (16)—(21) следует положить $\varkappa = 0$. Это соответствует твердотельному вращению с угловой скоростью ω.

В заключение выражаю благодарность проф. А. А. Власову за предложение темы работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. А. Статистические функции распределения. М., 1966.
2. Oort J. H. Bull. Astron. Netherl., 3, 79, 1927.
3. Шмутцер Э. Симметрии и законы сохранения в физике. М., 1974.
4. Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков. М., 1974.
5. Кузьменков Л. С. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 13, 28, 1972; 14, 493, 1973.
6. Огородников К. Ф. «Астрономический журнал», 35, 408, 1958.

Поступила в редакцию
30.8 1972 г.

Кафедра
теоретической физики