ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1975

УДК 621.385.6

В. И. КАНАВЕЦ

КУЛОНОВСКАЯ КАЛИБРОВКА ПОТЕНЦИАЛОВ И УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ МОЩНЫХ ПРИБОРОВ С ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

Уравнения нелинейной теории мощных приборов записаны при кулоновской калибровке потенциалов, соответствующей электростатическому взаимодействию заряженных частиц и возбуждению колебаний или волн вихревого поля [1].

Введение

В большинстве работ по нелинейной теории мощных приборов с электронным пучком, в которых используются дискретные модели, кулоновские силы находятся в электростатическом приближении при решении уравнения Пуассона [1—5]. Как следует из электродинамики и теории излучения [6], электростатическое взаимодействие последовательно вводится в рамках кулоновской калибровки потенциалов. Выбор калибровки определяет способ описания потенциального поля, запаздывающего взаимодействия, энергии системы и других физических величин. В нелинейной теории электронных приборов эта сторона вопроса слабо исследована, рабочие уравнения часто выводятся непосредственно из уравнений Максвелла без учета электродинамических потенциалов.

Обычно применяют лоренцеву калибровку $\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ или кулоновскую $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$, где φ и $\mathbf{A}$ — скалярный и векторный потенциалы. Им соответствует различное описание запаздывающего взаимодействия. При лоренцевой калибровке, применяемой часто в линейной либо в нелинейной теории [3—5], запаздывающее взаимодействие зарядов определяется возбуждением волн потенциального поля всей системы [6]. Элементы анализа, характерного для лоренцевой калибровки, встречаются в теории ЛБВ [1, 2]. В частности, выражения для кулоновских сил содержат динамические поправки, зависящие от запаздывания. При кулоновской калибровке непосредственное взаимодействие между зарядами считается мгновенным, без запаздывания. Запаздывание возникает как результат обмена энергией движущихся зарядов и вихревого поля.

[1] Доложено на Всесоюзном семинаре по методам учета сил пространственного заряда в электронных приборах СВЧ. Москва, 1972.

Возбуждение вихревого поля анализируется в теории клистрона. В теории ЛБВ [1] вначале рассматриваются неразделенные полные поля, затем через переход к нулевой частоте выделяется удовлетворяющее уравнению Пуассона квазистатическое электрическое поле. Однако выделяется также и квазистатическое магнитное поле, соответствующее магнитному взаимодействию токов без запаздывания. Остающееся вихревое поле имеет другой смысл, чем в теории, основанной на кулоновской калибровке.

В мощных электронных приборах велико влияние электронного пучка на электродинамические свойства резонаторов и замедляющих систем. Возбуждение полей должно рассматриваться одновременно с нахождением электронной нагрузки. Такое совместное рассмотрение особенно важно применять при исследовании процессов в выходном резонаторе или в ЛБВ, усиливающей вблизи границы полосы прозрачности.

В ряде мощных приборов используются многомодовые системы. При больших токах пучка необходимо учитывать собственное излучение электронов и их взаимодействие через нерезонансные моды вихревого поля [7]. Нелинейная теория должна содержать анализ систем с неустановившейся структурой поля при учете представления пучка в виде совокупности крупных заряженных частиц.

В нелинейной теории достаточно хорошо разработаны методы нахождения электростатических кулоновских сил и решения уравнений движения при заданном поле. Основное внимание следует уделить выводу уравнения возбуждения вихревого поля и рассмотрению влияния тока смещения.

Основные уравнения. Вихревой ток

Уравнения для макроскопических потенциалов при кулоновской калибровке имеют вид [8]

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\left(\mathbf{j} - \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi\right), \tag{1а}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1б}$$

где ε_0, μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума, ρ, $\mathbf{j}$ — плотности заряда и тока, c — скорость света. Напряженности электрического и магнитного поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ даются выражениями $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$, $H = \frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\mathbf{A}$. При пренебрежении шумами микроскопические плотности ρ и $\mathbf{j}$ являются статистическими средними [1, 9]. Они даются выражениями, справедливыми также и для трехмерной дискретной модели,

$$\rho = e_0\sum_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k), \quad \mathbf{j} = e_0\sum_k \mathbf{v}_k\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k),$$

где k — номер частицы, e_0 — ее заряд. Релятивистское уравнение движения k-той частицы имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \frac{e}{m}\sqrt{1 - \frac{v_k^2}{c^2}}\left[\mathbf{E}_p(k) + \mathbf{v}_k + \mu_0\mathbf{H}_p(k) - \frac{1}{2}\mathbf{v}_k(\mathbf{v}_k\mathbf{E}_p(k))\right], \tag{2}$$

где $\frac{e}{m}$ — отношение заряда к массе электрона, $\mathbf{E}_p(k)$ и $\mathbf{H}_p(k)$ — напряженности результирующего поля в месте нахождения частицы.

Плотность конвекционного тока $\mathbf{j}$ разделяется на вихревую и потенциальную части $\mathbf{j}_\text{в}$, $\mathbf{j}_\text{п}$, $\mathbf{j}=\mathbf{j}_\text{в}+\mathbf{j}_\text{п}$, где $\operatorname{rot}\mathbf{j}_\text{в}\neq 0$ $\operatorname{div}\mathbf{j}_\text{в}=0$, $\operatorname{rot}\mathbf{j}_\text{п}=0$ $\operatorname{div}\mathbf{j}_\text{п}\neq 0$. Используя уравнение непрерывности $\operatorname{div}\mathbf{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ и уравнение Пуассона (1б), легко показать выполнение равенства $\mathbf{j}_\text{п}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi=0$. Оно применяется в теории клистрона и других ламп СВЧ с плоскими зазорами (диодов, триодов) при нахождении наведенного тока [10, 11]. Как следует из уравнения (1а), вихревое поле возбуждается вихревым (полным) током.

В случае простых односвязных замкнутых объемов, которыми могут быть и частичные области, вихревое поле представляется в виде полей $E(TM)$ и $H(TE)$-типов с напряженностями $\mathbf{E}_\text{В}^{(E)}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\Pi_z^{(e)}\mathbf{z}_0)$, $\mathbf{H}^{(H)}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\Pi_z^{m}\mathbf{z}_0)$, где $\mathbf{z}_0$—единичный вектор [8, 12]. Скалярные функции $\Pi_z^{(e)}$ и $\Pi_z^{(m)}$ можно считать z-компонентами электрического и магнитного поляризационных потенциалов. Вектор $\mathbf{j}_\text{В}$ также разделяется:

$$\mathbf{j}_\text{В}^{(E)}=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_{t_0}^{t}\frac{P_z\mathbf{z}_0 d\tau}{\varepsilon_0\mu_0},\qquad \mathbf{j}^{(H)}=\operatorname{rot}(M_z\mathbf{z}_0),$$

где P_z, M_z — продольные компоненты поляризации и намагниченности. Для $\Pi_z^{(e)}$ и $\Pi_z^{(m)}$ справедливы получающиеся из (1а) волновые уравнения

$$\Box\Pi_z^{(e)}=-\frac{P_z}{\varepsilon_0},\qquad \Box\Pi_z^{(m)}=M_z\left(\Box=\Delta-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right).$$

Вне электронного пучка ($\rho=\mathbf{j}=0$) вихревой ток продолжается в виде тока смещения $\mathbf{j}_\text{В}=\mathbf{j}_\text{см}=\varepsilon_0\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$. Для полей E-типа выполняются соотношения $\Delta P_z=0$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=c^2\operatorname{div}\left(\frac{P_z\mathbf{z}_0}{\varepsilon_0}\right)$. Ввиду квазистационарности тока смещения наведенные на стенках волновода заряды и наведенные (вихревые) токи удовлетворяют теореме Рамо без поправки на запаздывание [12]. При вариационной формулировке задач электродинамики [8] и использовании приближенных методов их решения (например, метода частичных областей) находятся эквивалентные входные проводимости элементов электродинамических систем и областей взаимодействия и совершается переход к эквивалентным схемам, питаемым наведенным током. Вместо нахождения наведенных токов можно вычислять мощность взаимодействия и электронную проводимость (см. ниже). Эквивалентные схемы и решение уравнения Пуассона широко применяются в теории приборов СВЧ [4, 5]. Однако рассмотрение не последовательно, так как в основу анализа положены уравнения электродинамики при лоренцевой калибровке потенциалов.

В теории ЛБВ [1—5] вихревой ток не рассматривается. Без установления вида калибровки возникают трудности в понимании физики запаздывающего взаимодействия. При кулоновской калибровке уравнения (1) совместно с уравнениями движения и непрерывности преобразуются в систему уравнений связанных волн вихревого поля и плазменных колебаний потенциального поля. Для отдельно взятых плазменных волн влияние окружающих пучок стенок выражается во введении коэффициента редукции плазменной частоты, изменяющегося между нулем и единицей. При другой калибровке, например лоренцевой, частота продольных колебаний в пучке зависит от запаздывающего взаимодействия, которое обусловливается возбуждением невихревого поля резонаторов и замедляющих систем. Формально введенная поправка к плазменной частоте, называемая коэффициентом депрессии и имеющая смысл только при достаточно слабой связи, отличается от коэффициента редукции и может быть отрицательной [13].

В нелинейной теории, основанной на кулоновской калибровке, поправки к плазменной частоте, входящие в выражение для кулоновских сил, всегда положительны. Введение в рассмотрение положительных и отрицательных коэффициентов депрессии, как это сделано в [1], означает использование калибровки, отличающейся от кулоновской.

Возбуждение объемного резонатора

Типичный резонатор мощных приборов состоит из собственно резонаторной полости с малыми собственными и внешними потерями, не искажающими картину полей собственных колебаний, и участков труб дрейфа для ввода и вывода электронного пучка. Обычно известна картина полей собственных колебаний в резонаторе $\mathbf{A}_s(\mathbf{r})\left(\Delta\mathbf{A}_s+\frac{\omega_s^2}{c^2}\mathbf{A}_s=0\right)$, резонансные частоты ω_s и «холодные» добротности Q_s. Общее решение неоднородного уравнения представляется в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},\ t)=\sum_s q_s(t)\,\mathbf{A}_s(\mathbf{r}), \tag{3}$$

где суммирование проводится по всем собственным колебаниям. Выделим в (1а) токи проводимости $\mathbf{j}_\sigma=\hat{\sigma}\mathbf{E}_\text{В}$ и сторонние токи $\mathbf{j}_\text{ст}$, например, токи связи резонаторов через отверстия. Уравнение (1а) преобразуется в уравнение для амплитуд $q_s(t)$:

$$\frac{d^2q_s}{dt^2}+2\alpha_s\frac{dq_s}{dt}+\omega_s^2q_s=\frac{1}{\varepsilon_0N_s}\int\limits_V\left(\mathbf{j}-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi\right)\times$$

$$\times\,\mathbf{A}_s dv+\frac{1}{\varepsilon_0N_s}\int\limits_V\mathbf{j}_\text{ст}\mathbf{A}_s dv, \tag{4}$$

где V — объем рассматриваемого резонатора, N_s — норма

$$N_s=\int\limits_V A_s^2\,dv,\qquad \alpha_s=\frac{\omega_s}{2Q_s}=\frac{\int\limits_V\hat{\sigma}_sA_s^2\,dv}{2\varepsilon_0N_s}.$$

Принимая во внимание формулу векторного анализа

$$\int\limits_V(\varphi\operatorname{div}\mathbf{A}+\mathbf{A}\operatorname{grad}\varphi)\,dv=\oint\varphi\mathbf{A}d\mathbf{S} \tag{5}$$

и условия на границах, получим соотношение

$$\int\limits_V\mathbf{A}_s\operatorname{grad}\varphi\,dv=0. \tag{6}$$

При условии (6) в уравнении (4) остаются только конвекционный и сторонний токи:

$$\frac{d^2q_s}{dt^2}+2\alpha_s\frac{dq_s}{dt^2}+\omega_s^2q_s=\frac{1}{\varepsilon_0N_s}\int\limits_V \mathbf{j}\mathbf{A}_s dv+\frac{1}{\varepsilon_0N_s}\int\limits_V \mathbf{j}_{\text{ст}}\mathbf{A}_s dv. \qquad (7)$$

Уравнения колебаний (7) для разных s справедливы при произвольной электронной нагрузке и для связанной системы резонаторов. В случае $N_s=\frac{1}{\varepsilon_0}$ и $\mathbf{j}_{\text{ст}}=0$ они совпадают с уравнениями возбуждения резонаторов [12]. Общий ход преобразований при получении (7) из (4) аналогичен преобразованиям, проведенным в [1]. При возбуждении основных мод резонаторов уравнение (7) позволяет перейти к эквивалентным схемам.

Рассмотрим возбуждение резонатора с малой электронной нагрузкой (правая часть (7) мала) заданным гармоническим током, медленно меняющимся во времени $\mathbf{j}=\operatorname{Re}(\mathbf{J}_\omega e^{i\omega t})$. Можно положить $q_s=\operatorname{Re}(C(t)e^{i\omega t})$, где $C(t)$ — медленно меняющаяся амплитуда. Рассмотрим резонансное колебание с частотой $\omega_s\cong\omega$. После усреднения (7) во времени и отбрасывания второй производной получим уравнение

$$\frac{dC_s}{dt}+i(\omega-\hat{\omega}_s)C_s=-\frac{i}{2\varepsilon_0N_s\omega}\left(\int\limits_V \mathbf{J}_\omega\mathbf{A}_s dv+\int\limits_V \mathbf{J}_{\text{ст}\omega}\mathbf{A}_s dv\right), \qquad (8)$$

где $\hat{\omega}_s=\omega_s+i\alpha_s$ — комплексная частота. Выражение (8) при $\mathbf{J}_{\text{ст}}=0$ и с учетом связи напряженности и векторного потенциала аналогично уравнению возбуждения резонатора заданным током [1].

Плотность тока электронного пучка мощного прибора может быть существенно непериодической функцией координаты. В общем случае она заранее неизвестна. Для нахождения $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ надо решать задачу об установлении колебаний в резонаторе и установлении движения электронов. При исследовании выходного резонатора, в котором происходит глубокое торможение электронов, следует учитывать обратные их потоки [14]. Сложный характер движения электронов требует использования дискретных моделей. Для трехмерной модели уравнение возбуждения (7) при учете свойств δ-функции будет иметь вид

$$\frac{d^2q_s}{dt^2}+2\alpha_s\frac{dq_s}{dt}+\omega_s^2q_s=\frac{e_0}{\varepsilon_0N_s}\sum_k \mathbf{v}_k\mathbf{A}_s(k)+\frac{1}{\varepsilon_0N_s}\int\limits_V \mathbf{j}_{\text{ст}}\mathbf{A}_s dv, \qquad (9)$$

где $\mathbf{A}_s(k)$ — среднее по частице номера k значение вектор-потенциала. Первый член правой части (9) после умножения на $\varepsilon_0N_s\frac{dq_s}{dt}$ равен мощности взаимодействия пучка с s-й модой колебаний. При $\alpha_s=0$ и $\mathbf{j}_{\text{ст}}=0$ уравнение (9) аналогично уравнению возбуждения вихревого поля теории излучения [6].

Система уравнений (9) для совокупности мод резонатора позволяет исследовать собственное и вынужденное излучение электронов в сложных областях, в том числе при неустановившейся структуре поля. В случае периодических граничных условий система (9) позволяет рассматривать излучение электронных осцилляторов в свободном пространстве [6], в том числе когерентные эффекты при излучении [8].

Установление колебаний и движения электронов в резонаторе клистрона с малой электронной нагрузкой следует рассматривать в приближении медленно меняющихся амплитуд $q_s=\operatorname{Re}(C_s(t)e^{i\omega t})$. После усреднения (9) по периоду получается уравнение первого приближения

$$\frac{dC_s}{dt}+i(\omega-\omega_s)C_s=-\frac{ie_0}{4\pi\varepsilon_0 N_s}\int_0^T\sum_k \mathbf{v}_k\mathbf{A}_s(k)e^{-i\omega\tau}d\tau. \qquad (10)$$

Правая часть (10), умноженная на величину $-\omega^2\varepsilon_0 N_s C_s^*$, равна комплексно-сопряженной мощности взаимодействия пучка и поля. Она определяет электронную нагрузку s-й моды резонатора. В методе эквивалентных схем знание мощности взаимодействия позволяет найти наведенный ток или электронную проводимость. Скорости $\mathbf{v}_k$ находятся при совместном решении (10) и уравнения движения (2) численными методами. Для исследования установившегося режима следует положить $\frac{dC_s}{dt}=0$ и анализировать установление движения электронов, как это сделано в одномерном приближении [14].

Возбуждение волноводов и замедляющих систем

Рассмотрим возбуждение вихревых полей E и H типов волноведущей системы с гладкой граничной поверхностью и поля E типа волновода со сложной поверхностью. В мощных приборах с продольным взаимодействием пучка и поля часто используются периодические структуры. Выделяются два предельных случая. Если период структуры гораздо меньше замедленной длины волны, то совершается переход к эквивалентному волноводу с гладкой цилиндрической поверхностью, на которой заданы сложные граничные условия. Если период сравним с длиной волны, то для описания замедляющих свойств в большинстве случаев применимы приближенные методы анализа и совершается переход к эквивалентным схемам. Система связанных резонаторов, например, электродинамически описывается уравнениями (7)—(10), которые при $s=1$ и детализации вида токов связи переходят в уравнения эквивалентных схем. Метод эквивалентных схем при кулоновской калибровке потенциалов позволил рассмотреть усиление ЛБВ за границей полосы прозрачности [16], где теории ЛБВ [1, 2] не применимы, в том числе в диафрагмированных волноводах, гребенках и т. д. [12].

В волноводах с гладкими стенками, в том числе в диафрагмированных волноводах, гребенках и др. [12], распространяются волны вихревого поля E и H типов. Их структура находится при решении однородных уравнений

$$\Box\,\Pi_z^{(e)}(\mathbf{r},t)=0,\quad \Box\,\Pi_z^{(m)}(\mathbf{r},t)=0.$$

Для гармонического сигнала частные решения имеют вид

$$\Pi_{mz}^{(e,m)}(\mathbf{r},t)=\mathrm{Re}[\Pi_{mz}^{(e,m)}e^{i\omega t}]=\mathrm{Re}[f_m^{(e,m)}(u_1,u_2)e^{i(\omega t-h_m z)}], \qquad (11)$$

где u_1 и u_2 — поперечные координаты, $f_m=f_{-m}$ — безразмерные собственные функции ($\Delta f_m+\beta_m^2 f_m=0$), $h_m=-h_{-m}$ — волновое число, $h_m^2=k^2-\beta_m^2$. Для f_m выполняется условие ортогональности и нормировки в поперечном сечении $S_\perp$: (для спиралей оно не справедливо):

$$\int_{S_\perp} f_m^{(e,m)}f_n^{(e,m)}ds=N_m^{(E,H)}\delta_{mn},\quad \delta_{mn}=\begin{cases}0 & m\neq n\\ 1 & m=n.\end{cases} \qquad (12)$$

Комплексные векторные функции E- и H- волн представляются в виде произведений $\mathbf{A}_m^{(E)}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, $\mathbf{A}_m^{(H)}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$. Величины $\mathbf{A}_m^{(E)}$ и $\mathbf{A}_m^{(H)}$ удовлетворяют уравнению $\Delta\mathbf{A}_m+k^2\mathbf{A}_m=0$ и выражаются через Π_{mz} и единичный вектор $\mathbf{z}_0$ вдоль оси волновода [8, 12]:

$$\mathbf{A}_m^{(E)} = \frac{i}{\omega}\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{z}_0 \Pi_{mz}^{(e)}) =$$

$$= \frac{i}{\omega}[\mathbf{z}_0 \beta_m^2 f_m^{(e)} - ih_m \operatorname{grad}_\perp f_m^{(e)}] e^{-ih_m z}, \tag{13а}$$

$$\mathbf{A}_m^{(H)} = \mu_0 \operatorname{rot}(\mathbf{z}_0 \Pi_{mz}^{(m)}) = \mu_0 (\operatorname{grad}_\perp f_m^{(m)} \times \mathbf{z}_0) e^{-ih_m z}, \tag{13б}$$

где $\operatorname{grad}_\perp$ — градиент в поперечной плоскости, $\mathbf{A}_{-m} = \mathbf{A}_m^*$.

Разложим в уравнении (1а) потенциалы и токи в ряд Фурье. Рассмотрим какой-либо гармонический компонент с частотой ω. Уравнение (1а) для комплексной амплитуды гармоники принимает вид неоднородного уравнения Гельмгольца

$$\Delta\,\mathbf{A}_\omega + k^2\mathbf{A}_\omega = -\mu_0(\mathbf{j}_\omega - i\,\omega\varepsilon_0 \operatorname{grad}\varphi_\omega), \tag{14}$$

где φ_ω и $\mathbf{j}_\omega$ — амплитуды гармоник φ и $\mathbf{j}$. Уравнение (14) отличается от соответствующего уравнения теории ЛБВ [12, 15] наличием тока смещения. Общее решение для E- и H-волн представляется в виде разложения

$$\Pi_z^{(e,m)} = \sum_m [q_m(z)\,\Pi_{mz}^{(e,m)} + q_{-m}\,\Pi_{-mz}^{(e,m)}]. \tag{15}$$

Отметим простую связь z-компонентов напряженностей и потенциалов:

$$E_{mz}^{(E)} = \operatorname{rot}_z \operatorname{rot}(\Pi_{mz}^{(e)} \mathbf{z}_0) = \beta_m^2\;\Pi_{mz}^{(e)};$$

$$H_{mz}^{(H)} = \operatorname{rot}_z \operatorname{rot}(\Pi_{mz}^{(m)} \mathbf{z}_0) = \beta_m^2\;\Pi_{mz}^{(m)}. \tag{16}$$

Для E- и H-волн соотношение (14) с учетом (16) эквивалентно разложениям

$$E_{Bz}^{(E)} = \frac{i}{\omega} A_z^{(E)} = \sum_m (q_m E_{mz}^{(E)} + q_{-m} E_{-mz}^{(E)}),$$

$$\mathbf{H}_\perp^{(E)} = \sum_m (q_m \mathbf{H}_{m\perp}^{(E)} + q_{-m}\mathbf{H}_{-m\perp}^{(E)}); \tag{17}$$

$$H_z^{(H)} = \sum_m (q_m H_{mz}^{(H)} + q_{-m} H_{-mz}^{(H)}),$$

$$\mathbf{E}_{B\perp}^{(H)} = \frac{i}{\omega}\;\mathbf{A}_{m\perp}^{(H)} = \sum_m (q_m \mathbf{E}_{m\perp}^{(H)} + q_{-m}\mathbf{E}_{-m\perp}^{(H)}). \tag{18}$$

Условие $\operatorname{div}\mathbf{E}_B = \operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ позволяет получить связь q_m и q_{-m}:

$$\frac{dq_m}{dz} e^{-ih_m z} + \frac{dq_{-m}}{dz} e^{ih_m z} = 0. \tag{19}$$

Подставим выражение (17) для $A_z^{(E)} = -i\omega E_{Bz}^{(E)}$ в уравнение (14), умножим левую и правую части на $E_{-mz}^{(E)}$ и проинтегрируем по сечению. После ряда преобразований с использованием (12), (16) и (19) получим уравнение возбуждения моды вихревого поля E-волны:

$$\frac{dq_m}{dz} = -\frac{\omega\mu_0}{2h_m\beta_m^4 N_m^{(E)}} \int\limits_{S_\perp} j_{Bz} E_{-mz}^{(E)} ds =$$

$$= -\frac{\omega\mu_0 e^{ih_m z}}{2h_m \beta_m^2 N_m^{(E)}} \int\limits_{S_\perp} \left(j_{\omega z} - i\,\omega\varepsilon_0 \frac{\partial\varphi_\omega}{\partial z} \right) f_m^{(e)} ds. \qquad (20)$$

Для перехода к модели крупных частиц уравнение (20) следует усреднить по интервалу Δz, величина которого зависит от значения производной $\frac{dq_m}{dz}$. В случае медленного изменения q_m (квазипериодичности по z) интервал Δz равен электронной длине волны Λ.

Уравнение возбуждения теории ЛБВ [1] в отличие от (20) содержит все компоненты конвекционного тока и не включает ток смещения. Уравнение (20) переходит в соответствующее уравнение возбуждения теории [1] при условии квазипериодичности процессов. В этом случае для вектора $\mathbf{j}_B$ и потенциала $\Pi_z^{(e)}(\mathbf{r})$ выполняется соотношение типа (6), с помощью которого получаются зависимости

$$\int\limits_{V_\Lambda} j_{Bz} E_{-mz} dv = \frac{\beta_m^2}{h_m^2} \int\limits_{V_\Lambda} \mathbf{j}_{B\perp} \mathbf{E}_{-m\perp} dv = \frac{\beta_m^2}{k^2} \int\limits_{V_\Lambda} \mathbf{j}\mathbf{E}_{-m} dv, \qquad (21)$$

где V_Λ — объем участка волновода длиной Λ. Таким образом, z — составляющая вихревого тока определяется всеми составляющими конвекционного тока. Поток мощности в волноводе дается векторным произведением

$$P_m^{(E)} = \frac{1}{4} Re \int\limits_{S_\perp} [\mathbf{E}_{m\perp}^{(E)} \mathbf{H}_{m\perp}^{(E)*}] ds,$$

где

$$\mathbf{E}_{m\perp}^{(E)} = -\,ih_m \operatorname{grad}_\perp f_m^{(e)} e^{-ih_m z},$$

$$H_{m\perp}^{(E)*} = -\mathbf{H}_{-m\perp}^{(E)} = -\,i\,\omega\varepsilon_0 [\operatorname{grad}_\perp f_m^{(e)} \mathbf{z}_0]\, e^{ih_m z}.$$

Используя векторные формулы, формулу Стокса и граничные условия, получим вспомогательное соотношение

$$\int\limits_{S_\perp} \operatorname{grad}_\perp^2 f_m^{(e)} ds = \beta_m^2 N_m^{(E)}.$$

После некоторых выкладок находим связь между введенной в [1] нормой $N_m = -4P_m^{(E)}$ и нормой $N_m^{(E)}$, определяемой соотношением (12)

$$N_m = -2\,\omega\varepsilon_0 h_m \beta_m^2 N_m^{(E)}. \qquad (22)$$

Уравнение (20) при учете (21) и (22) переходит в уравнение возбуждения теории ЛБВ [1] для усредненных по периоду Λ величин $\bar{q}_m$:

$$\frac{d\bar{q}_m}{dz} = \frac{1}{N_m} \int\limits_{S_\perp} \overline{\mathbf{j}\mathbf{E}}_{-m} ds = \frac{1}{N_m \Lambda} \int\limits_{\Lambda} \int\limits_{S_\perp} \mathbf{j}\mathbf{E}_{-m} ds\, dz. \qquad (23)$$

Применим к левой и правой частям уравнения (14) операцию rot. Получим уравнение для напряженности **H**. Подставим вместо **H** разложение (18). Найдем уравнение возбуждения моды вихревого поля H-волны, не содержащее ток смещения,

$$\frac{dq_m}{dz} = \frac{e^{ih_m z}}{2ih_m^3 N_m^{(H)}} \int\limits_{S_\perp} \text{rot}_z \, \mathbf{j}_\omega f_m^{(m)} \, ds. \quad (24)$$

Усредненные по малому интервалу $\Delta z \ll \Lambda$ уравнения (20) и (24) позволяют рассмотреть возбуждение E и H-полей гладкого волновода при любых токах электронного пучка. Отличительная особенность возбуждения E-полей мощным потоком заключается в необходимости прямого учета тока смещения. Перейдем в уравнении (20) к трехмерной модели. После преобразований с использованием формулы (5) и граничных условий получим усредненное уравнение возбуждения

$$\frac{d\bar{q}_m}{dz} = -\frac{\omega\mu_0 e^{ih_m z}}{2h_m \beta_m^2 N_m^{(E)}} \left\{ \frac{e_0}{T\Delta z} \int\limits_0^T e^{-i\omega\tau} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_k v_{kz} f_m^{(e)}(k) \, d\tau - i\,\omega\varepsilon_0 \frac{\partial\bar{\varphi}_m}{\partial z} \right\}, \quad (25)$$

где суммирование проводится по всем частицам в рассматриваемом объеме

$$\frac{\partial\bar{\varphi}_m}{\partial z} = \frac{1}{\Delta z} \int\limits_{\Delta z} \int\limits_{S_\perp} \frac{\partial\varphi_\omega}{\partial z} f_m^{(e)} \, ds \, dz.$$

В заключение следует сказать, что использование кулоновской калибровки потенциалов позволяет провести последовательный вывод уравнений единой нелинейной теории мощных электронных приборов с резонаторами, замедляющими системами и волноводами в приближении электростатического взаимодействия зарядов и с учетом токов смещения. Полученные уравнения возбуждения вихревого поля применимы не только для анализа медленно меняющихся процессов, но и для исследования сильного влияния электронной нагрузки на резонансные частоты и постоянные распространения. Они позволяют также рассматривать возбуждение систем с нефиксированной структурой поля и перейти к трехмерной модели крупных заряженных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М., 1973.
2. Филимонов Г. Ф., Бадлевский Ю. Н. Нелинейное взаимодействие электронных потоков и радиоволн в ЛБВ. М., 1971.
3. Гайдук В. И., Палатов К. А., Петров Д. М. Физические основы электроники СВЧ. М., 1971.
4. Роу Дж. Теория нелинейных явлений в приборах СВЧ. М., 1971.
5. Советов М. Н. Основы теории лампы бегущей волны с учетом релятивистских эффектов. Изд-во Саратовского ун-та, 1966.
6. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. М., 1956.
7. Канавец В. И., Стабинис А. Ю. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 14, 186, 1973.
8. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М., 1960.
9. Климонтович Ю. Л. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. М., 1964.
10. Клистроны. Под ред. Е. Д. Науменко. М., 1954.
11. Клеен В., Пешль К. Введение в электронику СВЧ. М., 1963.

12. Лопухин В. М. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. М., 1953.
13. Лошаков Л. Н., Ольдерогге Е. Б., Пчельников Ю. Н. «Радиотехника и электроника», **10**, 4, 681, 1965.
14. Васильев Е. И., Канавец В. И., Лопухин В. М. «Радиотехника и электроника», **15**, 1189, 1970.
15. Пирс Дж. Лампа с бегущей волной. М., 1952.
16. Канавец В. И., Мозговой Ю. Д. «Радиотехника и электроника», **9**, 4, 1974.

Поступила в редакцию
23.5 1973 г.

Кафедра
радиотехники