Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1975

УДК 539.12.01

В. С. МИНЕЕВ, А. Р. ФРЕНКИН

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ВЕРШИННОЙ ЧАСТИ И УСЛОВИЕ УНИТАРНОСТИ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В работе показано, что асимптотическое поведение вершинной части полностью определяется возможными для данной диаграммы унитарными рассечениями. Рассмотрение проведено для взаимодействия скалярных мезонов с нуклонами, однако может быть обобщено и на другие виды взаимодействий.

В работе рассматривается связь асимптотического поведения вершинной части с условием унитарности, точнее, с возможными для данной диаграммы унитарными рассечениями. Исследование проводится для бозонной теории с лагранжианом взаимодействия $L=\lambda\varphi\varphi\varphi$, однако полученные результаты являются более общими и применимы для других случаев. Проведенное рассмотрение еще раз демонстрирует удобство скалярных теорий типа $\lambda\varphi$, в которых отсутствуют несущественные для ряда задач усложнения, связанные с наличием спина, что значительно упрощает все вычисления.

Рассмотрим вершинную диаграмму, изображенную на рис. 1. Считаем, что $p_1^2=p_2^2=m^2$, где m — масса тяжелого бозона. Везде в дальнейшем будет использована безразмерная система единиц, в которой все импульсы и массы частиц делятся на некоторую масштабную массу M и, следовательно, являются безразмерными величинами. При проведении вычислений бывает удобно выбрать M равной массе одной из частиц, например, массе тяжелого бозона.

Сразу же отметим, что результат принципиально не меняется, если импульсы частиц p_1 и p_2 взяты вне массовой поверхности.

Для вершинной диаграммы $2n+1$ порядка соответствующий фейнмановский интеграл имеет вид

$$\Gamma_{2n+1}(t)=\left\{\frac{i\lambda}{(2\pi)^4}\right\}^{2n+1}(3n-1)!\,(i\pi^2)^n M^{2n} g_{2n+1}(t),$$

$$g_{2n+1}(t)=\frac{1}{(i\pi^2)^n(3n-1)!}\int\prod_{j=1}^{n}d^4k_j\prod_{i=1}^{3n}(q_i^2-m_i^2+i\varepsilon)^{-1}. \qquad (1)$$

Здесь k_j — внутренние импульсы мезонов массы $\mu\,(0<\mu\leqslant m)$, q_i — импульсы, соответствующие внутренним линиям диаграмм и являющиеся линейными комбинациями k_j и внешних импульсов p_1 и p_2, $m_i=m$, μ, причем при $m_i=\mu$, $q_j=k_j$.

Используя тождество Фейнмана, функцию $g_{2n+1}(t)$ можно представить в виде

$$g(t)=\frac{1}{(i\pi^2)^n}\int_0^1\prod_{i=1}^{3n}d\alpha_i\delta\left(\sum_{i=1}^{3n}\alpha_i-1\right)\int\prod_{j=1}^{n}d^4k_j\left\{\sum_{i=1}^{3n}\alpha_i(q_i^2-m_i^2)\right\}^{-3n}. \quad (2)$$

Интегрированием по внутренним импульсам k_j выражение (2) может быть приведено к виду

$$g(t)=\int_0^1\frac{\prod_{i=1}^{3n}d\alpha_i\delta\left(\sum_{i=1}^{3n}\alpha_i-1\right)[C(\alpha)]^{n-2}}{[-A(\alpha)t+B(\alpha_1 m_i^2)]^n}, \quad (3)$$

где $C(\alpha)$ — главный минор квадратичной формы $\sum_{i=1}^{3n}\alpha_i(q_i^2-m_i^2)$, рассматриваемой как функция импульсов k_ik_j, k_j и членов, не содержащих импульсы k_j:

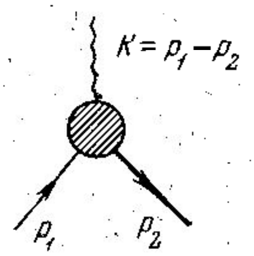

Рис. 1

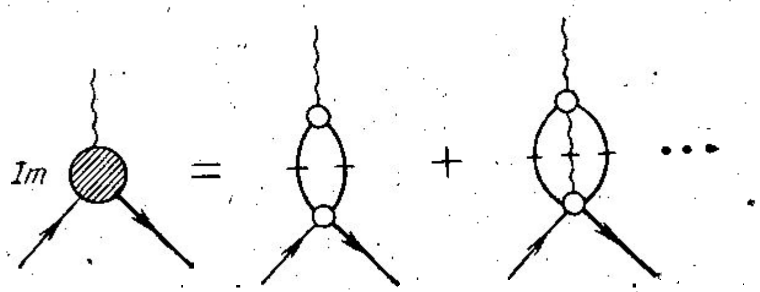

Рис. 2

Для определения асимптотического поведения диаграмм при $t\to\infty$ важны те значения переменных α_i, при которых $A(\alpha)$ обращается в нуль (см., например, [1]). В этом случае за счет нулей $A(\alpha)$ могут повыситься степень t и появиться члены вида $t^{-e}\ln^k t$, $l\leqslant n$, $k=0, 1, \ldots$.

В вершинных диаграммах существенны только сингулярности концевого типа, при котором некоторые наборы переменных α_i могут обращать величину $A(\alpha)B^{-1}(\alpha, m_i^2)$ в нуль на границе области интегрирования по соответствующим α_i. При этом для выделения в явном виде нулей отношения $A(\alpha)B^{-1}(\alpha, m_i^2)$ проводится операция масштабирования переменных α_i, при которой соответствующий набор параметров $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ переходит в набор переменных ρ, $\bar\alpha_1,\ldots,\bar\alpha_k$, причем

$$\alpha_j=\rho\bar\alpha_j,\quad d\alpha_1\ldots d\alpha_k=\rho^{k-1}d\rho d\bar\alpha_1\ldots d\bar\alpha_k\delta\left(\sum_{j=1}^{k}\bar\alpha_j-1\right), \quad (4)$$

а затем выполняется линеаризация (зануление) масштабного параметра ρ всюду в подынтегральном выражении, кроме существенного для вычисления асимптотики коэффициента ρ при асимптотической переменной t. При этом важно найти все возможные минимальные (т. е. содержащие минимальное число параметров α_i) наборы переменных α_i, обращающие в нуль отношение $A(\alpha)B^{-1}(\alpha, m_i^2)$. Эти наборы — так называемые t-пути Тиктопулоса [2]. Число таких путей определяет степень $\ln t$, а их длина — степень t в получающейся асимптотической формуле. Кроме того, для определения коэффициента при главном члене асимптотического разложения необходимо знать полный набор всех возможных масштабирований. Именно знание полного набора таких масштабирований позволило обнаружить [3] нарушение эйканального приближения в пятом порядке теории возмущений в модели $\lambda\varphi^3$.

В настоящей работе показано, что с помощью условия унитарности можно определить как минимальный, так и полный набор масштабирований переменных α_i из непосредственного рассмотрения диаграмм любого порядка. При этом существенным является тот факт, что для определения асимптотического поведения вершинной диаграммы важны области интегрирования с малыми значениями наборов α_i.

Согласно работе [4], $Img(t)$ может быть вычислена из условия унитарности. Для этого во всех унитарных рассечениях рассматриваемой диаграммы $2n+1$ порядка производится замена

$$(q_i^2 - m_i^2 + i\varepsilon)^{-1} \to 2\pi i\theta(q_{i0})\,\delta(q_i^2 - m_i^2). \tag{5}$$

Иначе говоря, $Img(t)$ определяется из диаграмм рис. 2, где все перечеркнутые линии лежат на массовой поверхности и проводится интегрирование только по соответствующему трехмерному импульсу. Отметим, что при этом каждой функции распространения $(q_i^2 - m_i^2)^{-1}$ и связанной с ней переменной α_i можно сопоставить несколько унитарных рассечений, пересекающих линию с данным импульсом q_i.

Обратим внимание на то, что обращение в нуль в подынтегральном выражении формулы (2) одной из переменных α_i, входящей в какой-либо из масштабируемых наборов, приводит к выпадению члена $\alpha_i(q_i^2 - m_i^2)$, относящегося именно к той внутренней линии, функция распространения которой в соответствующих унитарных рассечениях заменена на δ-функцию при определении $Img(t)$.

Тогда каждому набору замасштабированных параметров α_i должны быть сопоставлены все унитарные рассечения диаграммы. При этом обращение в нуль замасштабированных переменных приводит к отсутствию всех унитарных рассечений при определении $Img(t)$ для конечных значений t, т. е. обращению в нуль $Img(t)$.

Иначе говоря, определим масштабирование параметров как операцию, которая при занулении α_i устраняет все унитарные рассечения. При этом полный набор масштабирований — это набор всех возможных масштабирований, полностью устраняющих все унитарные рассечения.

Высказанные положения следуют из рассмотрения $Img(t)$, полученной из формулы (3)

$$Img(t) \sim \int_0^1 \prod_{i=1}^{3n} d\alpha_i \delta\left(\sum_{i=1}^{3n} \alpha_i - 1\right)[C(\alpha)]^{n-2}\,\delta^{(n-1)}(-At + B). \tag{6}$$

При $t_0 < t < \infty$ (t_0 — пороговое значение t) и $\rho \to 0$, $A(\alpha) \sim \rho$, $B(\alpha, m_i^2) \neq 0$ и $C(\alpha) \neq 0$ — коэффициенты для масштабирований наименьшей длины. Поэтому $Img(t) = 0$, что соответствует определению операции масштабирования. Но при $t \to \infty$ и $A(\alpha) \to 0$ функция $\delta^{(n-1)}(-At+B)$ может иметь особенности, т. е. $Img(t)\,| \neq 0$. Другими словами, область малых значений замасштабированных параметров существенна только при вычислении асимптотики $g(t)$ и слабо сказывается при конечных значениях переданного импульса.

Следует отметить, что в случае высших (неминимальных) наборов возможно, что $A(\alpha)\sim\rho^2$, $B(\alpha, m_i^2)\sim\rho$ (т. е. $B(\alpha, m_i^2)$ тоже обращается в нуль в рассматриваемой области значений переменных α_i). При этом

$$\delta^{(n-1)}(-At+B)=\frac{1}{\rho^n}\,\delta^{(n-1)}(-\rho\bar{A}t+\bar{B}) \qquad (7)$$

и при соответствующей длине масштабирования за счет якобиана преобразования (4) и множителя $C(\alpha)$ предыдущие рассуждения остаются справедливыми. Отсюда видно, что дополнительным критерием выбора масштабирований, существенных для расчета главного (лидирующего) члена асимптотического разложения, является принцип линейности: при $A(\alpha)\sim\rho^r$ (обычно r не превышает 2) необходимо, чтобы было

$$\frac{B_1(\alpha)}{B_2(\alpha)}\sim 1, \quad \text{где} \quad B(\alpha, m_i^2)=m^2B_1(\alpha)+\mu^2B_2(\alpha), \quad B_2(\alpha)=C(\alpha)\cdot\sum_{j=1}^{n}\gamma_j. \qquad (8)$$

Здесь γ_j — фейнмановские параметры, соответствующие мезонным линиям. Масштабирования, не удовлетворяющие этому принципу, не соответствуют асимптотике.

Обычно самые короткие из высших масштабирований (высшие масштабирования состоят из двух простых) имеют длину, равную $n+2$, и должны учитываться лишь в приводимых диаграммах и единственной неприводимой диаграмме пятого порядка, для которой $n=2$.

Таким образом, все необходимые для вычисления асимптотического поведения вершинной функции $g(t)$ масштабирования (полный набор), как и все минимальные наборы, определяются из условия унитарности при конечных значениях t.

Случаи синулярности подынтегрального выражения пинчевого типа, которые могут встретиться в более сложных диаграммах, требуют особого рассмотрения.

Ясно, что полученный результат является более общим и применим в любой теории с трехчастичным взаимодействием, в том числе и в случаях, когда внешние концы находятся не на массовой поверхности. Подобный подход при рассмотрении вкладов граничных областей α_i в асимптотику диаграмм справедлив и для процессов рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eden R. J., Landshoff P. V., Olive D. I., Polkinghorne J. C. The Analitic S-matrix, Cambridge Univ. Press, 1966.
2. Tiktopoulos G. Phys. Rev., 131, 480, 1960.
3. Eichten E., Jackiw R. Phys. Rev., D4, 439, 1971.
4. Cutkosky R. J. Math. Phys., 1, 429, 1960.

Поступила в редакцию
4.6 1973 г.

НИИЯФ