Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1975

УДК 521.13

Н. А. СОЛОВАЯ

О СТАЦИОНАРНЫХ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ДВИЖЕНИЯХ В ЗВЕЗДНОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Изучаются свойства стационарных промежуточных орбит звездной задачи трех тел и орбит, определяемых начальными условиями, близкими к стационарным.

1. В работе [1] было доказано существование стационарных промежуточных орбит звездной задачи трех тел следующих видов: а) круговые орбиты, б) эллиптические орбиты с аргументом периастра, равным 90 или 270°, в) прямолинейные орбиты с аргументом периастра, равным 0 или 180°. В настоящей статье исключаются из рассмотрения случаи вырождения орбит в прямолинейные отрезки и случаи компланарного движения. При этом условии доказывается, что никаких стационарных промежуточных орбит звездной задачи трех тел, кроме указанных в пунктах а) и б), не существует.

Далее изучены свойства промежуточных движений, определяемых начальными условиями, близкими к стационарным. В частности, исследовано поведение периода движения периастра в процессе предельного перехода к стационарным орбитам. Это исследование представляет интерес для установления общих свойств промежуточных движений звездной задачи трех тел. Рассмотрен также вопрос об устойчивости стационарных орбит.

2. Гамильтониан системы дифференциальных уравнений промежуточного движения звездной задачи трех тел имеет вид [2]:

$$F = \frac{\gamma_1}{2L_1^2} + \frac{\gamma_2}{2L_2^2} - \frac{1}{16}\gamma_3 \frac{L_1^4}{L_2^3 G_2^3}\{(1-3q^2)(5-3\eta^2) - 15(1-q^2)(1-\eta^2)\cos 2g_1\}, \tag{1}$$

где γ_1, γ_2, γ_3 — некоторые постоянные, зависящие от масс компонент,

$$\eta = \frac{G_1}{L_1}, \quad q = \frac{c^2 - G_1^2 - G_2^2}{2G_1G_2},$$

c — постоянная площадей, L_1, G_1, l_1, g_1 и L_2, G_2, l_2, g_2 — элементы Делоне соответственно внутренней и внешней орбит звезд.

В выражение (1) гамильтониана F входит только одна угловая переменная g_1. Таким образом, задача сводится к интегрированию гамильтоновой системы с одной степенью свободы:

$$\frac{dG_1}{dt}=\frac{\partial F}{\partial g_1},\quad \frac{dg_1}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial G_1}, \tag{2}$$

причем L_1, L_2 и G_2 будут постоянными.

Для удобства перейдем к новым искомым функциям по формулам

$$\lambda_1=e_1\cos g_1,\quad \lambda_2=e_1\sin g_1, \tag{3}$$

где $e_1=\sqrt{1-\eta^2}$ — эксцентриситет внутренней орбиты. В этих переменных дифференциальные уравнения движения примут вид (см. [1], § 4):

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_1}{dt}&=-\frac{\eta}{L_1}\frac{\partial F}{\partial\lambda_2}=\frac{N}{\eta}\Big[(3-5q^2)(1-\lambda_1^2)-\\&\quad-3\lambda_2^2-\frac{\eta q}{\bar G_2}(1-\lambda_1^2+4\lambda_2^2)\Big]\lambda_2,\\ \frac{d\lambda_2}{dt}&=\frac{\eta}{L_1}\frac{\partial F}{\partial\lambda_1}=\frac{N}{\eta}\Big[2(1-\lambda_1^2)-(2-5q^2)\lambda_2^2+\frac{\eta q}{\bar G_2}(1-\lambda_1^2+4\lambda_2^2)\Big]\lambda_1,\end{aligned}\tag{4}$$

причем

$$\eta=\sqrt{1-\lambda_1^2-\lambda_2^2},\quad q=\frac{(\bar c^2-\bar G_2^2-\eta^2)}{(2\bar G_2\eta)},\quad \bar G_2=\frac{G_2}{L_1},\ \bar c=\frac{c}{L_1},$$

N — положительная постоянная.

3. Под стационарными решениями рассматриваемой задачи подразумеваются такие, которым соответствуют постоянные значения λ_1 и λ_2. Предположим, что уравнения (4) удовлетворяются при постоянных λ_1 и λ_2, одновременно отличных от нуля. Тогда должны будут удовлетворяться следующие условия:

$$(3-5q^2)(1-\lambda_1^2)-3\lambda_2^2-\frac{\eta q}{\bar G_2}(1-\lambda_1^2+4\lambda_2^2)=0,$$

$$2(1-\lambda_1^2)-(2-5q^2)\lambda_2^2+\frac{\eta q}{\bar G_2}(1-\lambda_1^2+4\lambda_2^2)=0.$$

Сложив эти равенства, получим

$$5(1-q^2)(1-\lambda_1^2-\lambda_2^2)=5(1-q^2)(1-e_1^2)=0.$$

Полученное равенство может выполняться только либо при $q=\pm1$ (случай компланарного движения), либо при $e_1=1$ (случай прямолинейного движения внутренней звезды). Но эти случаи мы условились не рассматривать.

4. Займемся изучением свойств движений, близких по начальным условиям к стационарным. В работе [1] было показано, что для нестационарных орбит величина $\xi=\eta^2$ принимает значения, определяемые неравенством $\xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 суть два наименьших корня алгебраических уравнений:

$$f_2(\xi)=\xi^2-2(\bar c^2+3\bar G_2^2)\xi+(\bar c^2-\bar G_2^2)^2+\frac{2}{3}\bar G_2^2(10+A_3)=0,$$

$$f_3(\xi) = \xi^3 - \left(2\bar{c}^2 + \bar{G}_2^2 + \frac{5}{4}\right)\xi^2 + \left[\frac{5}{2}(\bar{c}^2 + \bar{G}_2^2) + \right.$$

$$\left. + (\bar{c}^2 - \bar{G}_2^2)^2 - \frac{1}{6}\bar{G}_2^2(10 + A_3)\right]\xi - \frac{5}{4}(\bar{c}^2 - \bar{G}_2^2)^2 = 0, \tag{5}$$

где

$$A_3 = 2 - 6\eta_0^2 q_0^2 - 6(1 - \eta_0^2)[2 - 5(1 - q_0^2)\sin^2 g_{10}],$$

индексом нуль отмечены значения соответствующих величин в начальный момент времени.

Начнем с изучения случая круговых орбит. Для орбит, близких в начальный момент к круговым, q_0 может иметь произвольное значение, а η_0^2 должно определяться равенством $\eta_0^2 = 1 - \varepsilon$, где ε — малая положительная постоянная. Вычислим при этих начальных условиях A_3 и, подставив его в уравнения (5), найдем значения их корней, ограничиваясь первыми степенями малой величины ε. Вводя обозначения

$$A = \frac{1}{8} + \frac{3}{2}\bar{G}_2^2 + 2\bar{G}_2 q_0, \quad B = 5\bar{G}_2^2 q_0^2 + \bar{G}_2 q_0 - 3\bar{G}_2^2,$$

$$Q = -4[2\bar{G}_2^2 + \bar{G}_2 q_0 - 5\bar{G}_2^2(1 - q_0^2)\sin^2 g_{10}],$$

$$a = 1 + A - \sqrt{A^2 - B},$$

получим меньший корень квадратного уравнения

$$\alpha_1 = 1 + \frac{Q\varepsilon}{4\bar{G}_2(2\bar{G}_2 + q_0)}$$

и два меньших корня кубического уравнения

$$\alpha_2 = 1 + \frac{Q\varepsilon}{4B},$$

$$\alpha_3 = a + \varepsilon\left[(a - 1)\left(2a - 5\bar{G}_2 q_0 + \frac{5}{2}\right)(1 + \bar{G}_2 q_0) - \frac{1}{4}Q\right]\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2B\sqrt{A^2 - B}}.$$

Наибольшие корни квадратного и кубического уравнений всегда очень велики и не представляют сейчас интереса.

Для исследования характера движения, близкого к стационарному круговому, необходимо выяснить, каково взаимное расположение корней α_1, α_2, α_3 на числовой оси.

Прежде всего рассмотрим случай, когда взаимный наклон орбит составляющих тройной звездной системы настолько мал и величина B положительна. При этом условии Q всегда отрицательно, и, следовательно, если ε достаточно мало, то α_1 и α_2 меньше единицы, а $\alpha_3 > 1$. Кроме того, в этом случае $\alpha_1 > \alpha_2$. Следовательно, η^2 все время будет заключено в границах

$$\alpha_2 \leqslant \eta^2 \leqslant \alpha_1. \tag{6}$$

При $\varepsilon \to 0$ левая и правая части этого неравенства стремятся к общему пределу, равному 1. Значит и переменная η^2 также стремится к 1, т. е. промежуточная орбита становится сколь угодно близкой к круговой при любом t, если только ε достаточно мало.

Перейдем к случаю, когда взаимный наклон орбит тройной системы достаточно велик и B становится отрицательным. Тогда корень α_3 при достаточно малом ε будет меньше 1, а расположение кривой α_1 и α_2 на числовой оси зависит от численного значения $\sin^2 g_{10}$.

Именно, если $\sin^2 g_{10} < (2\overline{G}_2 + q_0)/[5\overline{G}_2(1-q_0^2)]$, то Q отрицательно и будет выполняться неравенство $\alpha_1 < 1 < \alpha_2$. Следовательно, при достаточно малом ε η^2 будет заключено в пределах

$$\alpha_3 \leqslant \eta^2 \leqslant \alpha_1, \tag{7}$$

так как при $\varepsilon \to 0$ корень $\alpha_1 \to 1$, а предельное значение α_3 меньше 1.

Если же $(2\overline{G}_2 + q_0)/[5\overline{G}_2(1-q_0^2)] < \sin^2 g_{10}$, то величина Q положительна, вследствие чего $\alpha_2 < 1 < \alpha_1$. Значит при достаточно малом ε

$$\alpha_3 \leqslant \eta^2 \leqslant \alpha_2. \tag{8}$$

Когда верхний предел значений η^2 равен корню квадратного уравнения $f_2(\xi)=0$, внутренняя орбита тройной системы будет циркулярной [2]. Если же эта верхняя граница равна второму по величине корню кубического уравнения $f_3(\xi)=0$, то указанная орбита будет либрационной. Мы видим, что в (6) и (7) орбиты, определяемые начальными условиями, близкими к круговым, будут циркулярными, а (8) — либрационными.

Случай орбит, близких к стационарным эллиптическим, рассмотрим аналогично. Считая $\overline{c}$ и $\overline{G}_2$ фиксированными параметрами, предположим, что g_{10} и η_0 получили некоторые отклонения Δg_1 и $\Delta\eta$ от их значений, определямых условиям стационарности

$$g_{10} = \frac{\pi}{2}, \quad 5\overline{G}_2 q_0^2 + (5 - 4\eta_0^2) q_0 \eta_0 - 3\overline{G}_2 \eta_0^2 = 0.$$

Очевидно, изменения величин g_{10} и η_0 влияют на значения коэффициентов алгебраических уравнений (5) только за счет изменения константы A_3. Обозначим через ε приращение A_3, соответствующее изменениям g_{10} и η_0 на Δg_1 и $\Delta\eta$, найдем приближенные выражения двух меньших корней кубического уравнения $f_3(\xi)=0$. Нетрудно видеть, что эти корни могут быть представлены в виде рядов по степеням величины $\sqrt{-\varepsilon}$ (отсюда следует, что ε должно быть величиной отрицательной). Ограничиваясь членами первого порядка относительно $\sqrt{-\varepsilon}$, будем иметь

$$\alpha_2' = \eta_0^2 - \frac{\overline{G}_2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{6(\alpha-\eta_0^2)}}\sqrt{-\varepsilon} + \ldots$$

$$\alpha_3' = \eta_0^2 + \frac{\overline{G}_2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{6(\alpha-\eta_0^2)}}\sqrt{-\varepsilon} + \ldots, \tag{9}$$

причем $\alpha = 2\overline{c}^2 + \overline{G}_2^2 + \frac{5}{4} - 2\eta_0^2$. Корме того, в этом случае значение меньшего корня α_1' квадратного уравнения $f_2(\xi)=0$ превышает 1. Таким образом, в случае орбит, близких к стационарным эллиптическим,

$$\alpha_2' \leqslant \eta^2 \leqslant \alpha_3'. \tag{10}$$

Эти орбиты будут, очевидно, либрационными.

5. Исследование ляпуновской устойчивости стационарных решений легко выполнить с помощью общих методов теории устойчивости [3]. Однако результаты, полученные в п. 4, дают возможность обойтись без применения этих методов.

В (6) всегда можно выбрать ε настолько малым, чтобы последующие отклонения η^2 от 1 были по абсолютной величине меньше сколь угодно малого наперед заданного положительного числа δ. А это означает, что в (6) круговые движения будут устойчивыми относительно η^2 (или, что то же по отношению к эксцентриситету, e_1). В (7) и (8) круговые движения внутренней звезды будут неустойчивы. Это следует из того, что при $B<0$ нижняя граница изменений η^2, равная α_3, при $\varepsilon\to0$ имеет пределом величину $a=1+A-\sqrt{A^2-B}$, меньшую единицы. Значит можно подобрать столь малую положительную величину δ, что в некоторый момент времени $1-\eta^2$ превзойдет δ, как бы ни было мало начальное значение ε этой разности.

Наконец, эллиптические стационарные орбиты обладают свойством устойчивости по Ляпунову относительно величин g_1 и η (или g_1 и e_1), в чем легко убедиться, подставляя значения (9) корней α_2' и α_3' в формулы (VII) и (3.4а) работы [4].

6. Период движения периастра внутренней орбиты тройной звездной системы (см. [4], § 5) пропорционален величине K — полному эллиптическому интегралу первого рода с модулем $k=\sqrt{(\xi_2-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)}$, где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — расположенные в порядке возрастания три наименьших корня уравнений (5).

Вычислим предельные значения модуля k для (6), (7) и (8), (10).

В случае устойчивых стационарных орбит (6) и (10) в пределе $k=0$, т. е. $K=\frac{\pi}{2}$. Следовательно, период движения периастра внутренней орбиты в пределе при $\varepsilon\to0$ остается конечным.

С другой стороны, в (7) и (8), т. е. в случаях неустойчивых стационарных орбит в пределе при $\varepsilon\to0$, будет: $k=1$, $K=\infty$. Значит, при условиях (7) или (8) период движения периастра внутренней орбиты бесконечно возрастает, если ε неограниченно уменьшается.

7. В заключение сделаем несколько замечаний.

При изменении q_0 в пределах от $q_0=-1\pm\sqrt{60\bar{G}_2^2+1}$ до $q_0=-1/2\bar{G}_2$ параметр α, фигурировавший при исследовании орбит, близких по начальным условиям к круговым (см. п. 4), пробегает все значения от 1 до 0. Следовательно, по мере приближения косинуса q_0 угла взаимного наклона орбит составляющих тройной звездной системы $kq_0-1/2\bar{G}_2$ верхняя граница эксцентриситета e_1 приближается к 1. Значит, в случае неустойчивых круговых орбит при сколь угодно малых начальных отклонениях орбиты внутренней звезды от круговой последующие отклонения могут оказаться очень существенными. Это показывает, что при построении аналитической теории движения объектов типа тройных звездных систем необходимо соблюдать осторожность, если в качестве исходного приближения принимается круговое движение и в дальнейшем используются разложения в ряды по степеням эксцентриситета внутренней орбиты.

Далее отметим, что при $q_0=-1\pm\sqrt{60\bar{G}_2^2+1}$, $\eta_0=1$ выполняются условия существования как стационарных круговых, так и стационарных эллиптических орбит. Другими словами, в фазовой плоскости (q_0, η_0) точки с координатами $\eta_0=1$ $q_0=-1\pm\sqrt{60\bar{G}_2^2+1}$ являются точками бифуркации семейств стационарных решений. Этим и объясняется изменение свойств устойчивости стационарных круговых орбит при переходе через указанную точку [5]. Вопрос об устойчивости решений, соответствующих самим точкам бифуркации, здесь не рассматривался.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соловая Н. А. Частные случаи промежуточных движений в звездной задаче трех тел. Труды ГАИШ, т. 55, 1974.
2. Соловая Н. А. Промежуточные движения в звездной задаче трех тел. ВИНИТИ, № 2362, деп. , 1970.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., 1950.
4. Орлов А. А., Соловая Н. А. О вычислении промежуточных движений в тройных звездных системах. Труды ГАИШ, т. 55, 1974.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., 1965.

Поступила в редакцию
14.6 1973 г.

ГАИШ