ЛИТЕРАТУРА

1. Schneider J. Phys. Rev. Lett., 2, 504, 1959.
2. Синхротронное излучение. Сб. статей под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова. М., 1966, стр. 72—152.
3. Костиенко А. И., Королев А. Ф. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., **14**, 48, 1973.

Поступила в редакцию 10.7 1974 г.

Кафедра радиофизики

УДК 530.145

А. Б. КУКАНОВ, Н. Д. НАУМОВ

ДИРАКОВСКИЙ ЭЛЕКТРОН В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ И В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Вопрос о квантовых процессах при движении электрона в постоянном и однородном электрическом поле был предметом исследования в работах [1—4]. В настоящей заметке показывается, что уравнение Дирака допускает точное решение, когда кроме электрического поля присутствует поле плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль направления поля.

Считаем, что поле плоской волны описывается 4-потенциалом $A^n(\xi)$, $\xi=(kx)=k_nx^n=k_0ct-\mathbf{kr}$, а однородное электромагнитное поле генерируется потенциалом $B^n=\xi b^n$, где $b^n=(b_0, \mathbf{b})$ — некоторый постоянный вектор. Здесь c — скорость света в вакууме, $(kk)=0$. Очевидно, напряженности постоянных и однородных электрического и магнитного полей равны

$$\mathbf{E}=b_0\mathbf{k}-k_0\mathbf{b}, \quad H=[\mathbf{bk}]. \tag{1}$$

Видим, что $(\mathbf{EH})=0$ и $E^2-H^2>0$ и, следовательно, надлежащим преобразованием координат можно выбрать систему отсчета, в которой будет только электрическое поле. Можно показать, что в этой системе отсчета направление распространения волны параллельно направлению электрического поля. Решение уравнения Гамильтона — Якоби имеет вид [5]

$$S=-(px)+\frac{e}{\alpha c}\left[\left(pb\right)-\frac{\gamma}{2}\frac{(bb)}{(kb)}\right](\xi+\gamma\eta)-\frac{e}{4c}\frac{(bb)}{(kb)}\xi^2+$$
$$+\frac{e}{c}\int(pA)\,d\eta-\frac{e^2}{2c^2}\int(A\,[A+2\xi b])\,d\eta. \tag{2}$$

Здесь p^n — постоянный вектор, удовлетворяющий условию

$$(pp)=m^2c^2, \quad \alpha=\frac{e}{c}(kb), \quad \eta=\frac{1}{\alpha}\ln\left|\frac{\alpha}{\gamma}\xi-1\right|, \quad \gamma=(kp).$$

Сначала рассмотрим решение уравнения Клейна — Гордона

$$\left\{\left(\hat{p}^n-\frac{e}{c}A^n-\frac{e}{c}B^n\right)\left(\hat{p}_n-\frac{e}{c}A_n-\frac{e}{c}B_n\right)-m^2c^2\right\}\Psi=0. \tag{3}$$

Ищем его в виде

$$\Psi=e^{-\frac{i}{\hbar}(px)}F(\xi). \tag{4}$$

Для $F(\xi)$ получается следующее уравнение с учетом условия $(kA)=0$:

$$i\hbar(\alpha\xi-\gamma)F'+\left\{\frac{e}{c}(pA)+\frac{e}{c}\xi(pb)-\frac{e^2}{2c^2}(A+\xi b)^2+\frac{ie\hbar}{2c}(kb)\right\}F=0. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что

$$\Psi = Ce^{-\frac{\alpha}{2}\eta + \frac{i}{\hbar}S} = C\left|\frac{\alpha}{\gamma}\xi - 1\right|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}S}, \tag{6}$$

где S является классическим действием (2) для частицы. Вводя слабое затухание [6], из нормировки на δ-функцию находим $C = (2\pi\hbar)^{-3/2}$.

Перейдем к решению уравнения Дирака

$$\left\{\left(\gamma\left[i\hbar\partial - \frac{e}{c}(A+B)\right]\right) - mc\right\}\Psi = 0. \tag{7}$$

Представление матриц Дирака и другие обозначения те же, что и в [6].

Квадрируя уравнение (7), получим

$$\left\{-\hbar^2\partial^2 - \frac{2ie\hbar}{c}([A+\xi b]\partial) - \frac{ie\hbar}{c}\hat{k}(\hat{A}'+\hat{b}) + \frac{e^2}{c^2}(A+\xi b)^2 - m^2c^2\right\}\Psi = 0. \tag{8}$$

Решение уравнения (8) ищем в виде (4), где $F(\xi)$ — биспинор. Найдем уравнение для $F(\xi)$:

$$2i\hbar(\alpha\xi - \gamma)F' + \left\{2\frac{e}{c}(pA) + 2\frac{e}{c}\xi(pb) - \frac{e^2}{c^2}(A+\xi b)^2 + \frac{ie\hbar}{c}\hat{k}(\hat{A}'+\hat{b})\right\}F = 0. \tag{9}$$

Вводя обозначение $\hat{a} = \frac{e}{c}\int(\hat{A}'+\hat{b})\,d\eta$, получим следующее выражение для Ψ:

$$\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}S - \frac{1}{2}\hat{k}\hat{a}}\frac{u}{\sqrt{2p_0}}, \tag{10}$$

где $\frac{u}{\sqrt{2p_0}}$ — некоторый постоянный биспинор [6], а S совпадает с (2). Нетрудно видеть, что $(\hat{k}\hat{a})^n = [2(ka)]^{n-1}(\hat{k}\hat{a})$ и, следовательно,

$$e^{-\frac{1}{2}(\hat{k}\hat{a})} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\hat{k}\hat{a}\right)^r}{r!} = 1 + \frac{\hat{k}\hat{a}}{2(ka)}[e^{-(ka)} - 1]. \tag{11}$$

Таким образом, (10) можно записать в виде

$$\Psi_p = \left\{1 + \frac{\hat{k}\hat{a}}{2(ka)}[e^{-(ka)} - 1]\right\}\frac{u}{\sqrt{2p_0}}e^{\frac{i}{\hbar}S}. \tag{12}$$

Полагая в (12) $b^n = 0$, получим результаты (40.7) из [6] и [7]. Полагая в (12) $A^n = 0$, найдем решение уравнения Дирака для электрона в ортогональных полях ($E > H$):

$$\Psi_p = \left\{1 + \frac{\hat{k}\hat{b}}{2(kb)}(e^{-\alpha\eta} - 1)\right\}\frac{u}{\sqrt{2p_0}}e^{\frac{i}{\hbar}S}, \tag{13}$$

где

$$S = -(px) + \frac{e}{\alpha c}\left[(pb) - \frac{\gamma}{2}\frac{(bb)}{(kb)}\right](\xi + \gamma\eta) - \frac{e}{4c}\frac{(bb)}{(kb)}\xi^2. \tag{14}$$

В случае электрона в постоянном электрическом поле нужно положить $k^n = (1, 1, 0, 0)$, $b^n = (E, 0, 0, 0)$. Чтобы получить результат (98,21) из [6] для волновой функции электрона в «скрещенном» поле ($(\mathbf{EH}) = 0$, $|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|$), следует положить в (9) $(kb) = 0$, $A^n(\xi) = 0$ и затем найти $F(\xi)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нарожный Н. Б. ЖЭТФ, **54**, 676, 1968.
2. Никишов А. И. ЖЭТФ, **57**, 1210, 1969.
3. Никишов А. И. ЖЭТФ, **59**, 1262, 1970.
4. Жуковский В. Ч., Никитина Н. С. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астр., **14**, 94, 1973.
5. Куканов А. Б., Наумов Н. Д. ЖТФ, № 4, 903, 1975.
6. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория, ч. 1. 1968.
7. Волков Д. М. Z. Phys., **94**, 250, 1935.

Поступила в редакцию
22.7 1974 г.

Кафедра
теоретической физики