



УДК 681.142.33/34 : 533.601.342

С. П. СРЕЛКОВ, Н. Д. ТАРАНКОВА, А. А. ХАРЛАМОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ КРЫЛА В ПОЛЕТЕ

Задача определения критических значений $V_{кр}$ и $\omega_{кр}$ изгибо-крутильного флаттера решается как краевая задача для распределенной упругой системы. Приводятся формы колебаний неоднородного крыла при флаттере и дается сравнение полученных величин со значениями, даваемыми методом Бубнова — Галеркина.

Свободные колебания крыла в потоке воздуха при определенных предположениях можно описать однородной системой дифференциальных уравнений в частных производных [1]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right] - m\sigma \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - \\
 & - \rho V^2 h C_y^\alpha \left(\theta + \frac{h}{V} \Delta_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{V} \frac{\partial Z}{\partial t} \right) = 0, \\
 & - \frac{\partial}{\partial x} \left[GJ_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] - m\sigma \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + I_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \\
 & - \rho V^2 h^2 \Delta_2 C_y^\alpha \left(\theta + \frac{h}{V} \Delta_3 \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{V} \frac{\partial Z}{\partial t} \right) = 0. \tag{1}
 \end{aligned}$$

Здесь $Z(x, t)$ и $\theta(x, t)$ — координаты вертикального смещения упругой оси (изгиб) и угол поворота крыла (кручение) в сечении с координатой x , $EI(x)$; $GJ_p(x)$, $m(x)$ и $I_m(x)$ — изменяющиеся по размаху упруго-массовые характеристики крыла; ρ и V — плотность воздуха и скорость полета. h — хорда крыла. C_y^α , Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 — аэродинамические коэффициенты.

При таком описании крыло представлено тонкой балкой, а аэродинамика соответствует плоской квазистационарной теории [1].

Полагая крыло консольно закрепленным, уравнения (1) дополняются краевыми условиями:

$$Z(0, t) = \frac{\partial Z}{\partial x} \Big|_{0,t} = \theta(0, t) = 0, \tag{1'}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \Big|_{l,t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right] \Big|_{l,t} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{l,t} = 0 \dots \dots \dots$$

Интересуясь только границами области колебательной устойчивости крыла, решение для $V \neq 0$ записываем в виде

$$Z(x, t) = h\bar{F}(x) \cdot e^{i\omega t}, \quad (2)$$

$$\theta(x, t) = \bar{\Phi}(x) e^{i\omega t} \dots \dots \dots$$

где $\bar{F}(x) = f_1(x) + if_2(x)$ и $\bar{\Phi}(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$ — безразмерные комплексные функции формы. Следует подчеркнуть, что решение в форме (2) включает возможность бегущих волн изгиба и кручения.

Подстановка (2) в систему (1) приводит к краевой задаче на собственные значения, которую удобно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} [a_1(x)\bar{F}''(x)]'' &= \omega^2 [B_{11}b_1(x)\bar{F}(x) - B_{12}b_{12}(x)\bar{\Phi}(x) + \\ &+ B_{13}k(k\bar{\Phi}(x) + i\Delta_1\bar{\Phi}(x) - i\bar{F}(x))], \\ -[a_2(x)\bar{\Phi}']' &= \omega^2 [B_{22}b_2(x)\bar{\Phi}(x) - B_{21}b_{21}(x)\bar{F}(x) + \\ &+ B_{23}k(k\bar{\Phi}(x) + i\Delta_3\bar{\Phi}(x) - i\bar{F}(x))] \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (3)$$

при условиях

$$\bar{F}(0) = \bar{F}'(0) = \bar{\Phi}(0) = 0, \quad (3')$$

$$\bar{F}''(l) = [a_1\bar{F}']'_l = \bar{\Phi}'(l) = 0 \dots \dots \dots$$

Здесь ω^2 и $k = \frac{V}{\partial h}$ — параметры, принимающие собственные значения. В этом случае $\omega = \omega_{кр}$ и $R = R_{кр}$ — критическая частота и безразмерная скорость флаттера.

$$a_1(x)EI_l = EI(x); \quad b_1(x)m_0 = m(x);$$

$$B_{11} = \frac{m_0}{EI_l}; \quad B_{12} = B_{11} \frac{\sigma}{h}; \quad B_{13} = \frac{\rho h^2 C_y^a}{EI_l} \text{ и т. д.}^1$$

На практике такая задача решается методом Бубнова—Галеркина, позволяющим определить приближенные значения критических параметров флаттера $\omega_{кр}$ и $V_{кр}$, а формы колебаний упругой системы задаются извне. В данной работе решалась краевая задача (3) для распределенной упругой системы, при краевых условиях (3'). Решение проводилось на аналоговой модели.

В данной работе, во-первых, определены точные² значения критических параметров и они сравниваются со значениями, полученными приближенным методом; во-вторых, получено представление об истинных формах движения крыла и отмечены их отличия от тех форм (стоячих волн), которые задаются в методе Бубнова—Галеркина; и наконец, испытана и отработана методика решения на аналоговой модели.

Для решения на аналоговой модели краевую задачу (3) и (3') следовало свести к задаче Коши. Недостающие для этого значения искомых функций на одном конце крыла ($x=l$) определялись через

¹ Символ ()' означает дифференцирование по x .

² Точность в рамках принятой модели (1) определялась точностью аналоговой машины.

заданные значения этих же функций на другом конце крыла ($x=0$) из линейной алгебраической системы:

$$\begin{aligned} \bar{F}(0) &= a_{11} \bar{F}(l) + a_{12} \bar{F}'(l) + a_{13} \bar{\Phi}(l), \\ \bar{F}'(0) &= a_{21} \bar{F}(l) + a_{22} \bar{F}'(l) + a_{23} \bar{\Phi}(l), \\ \bar{\Phi}(0) &= a_{31} \bar{F}(l) + a_{32} \bar{F}'(l) + a_{33} \bar{\Phi}(l) \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Комплексные элементы матрицы a_{ij} системы (4) определялись специальным методом [2, 3] для каждого нового значения ω и V на этой же электронной модели.

Если значения ω и V равны собственным, то система (4), однородная в силу условий (3'), сразу представляет два из недостающих краевых условий $\bar{F}(l)$ и $\bar{F}'(l)$ при произвольно заданном третьем $\bar{\Phi}(l)$. Определитель системы (4) при этом равен нулю [4].

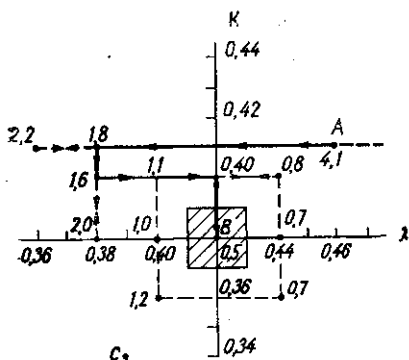


Рис. 1

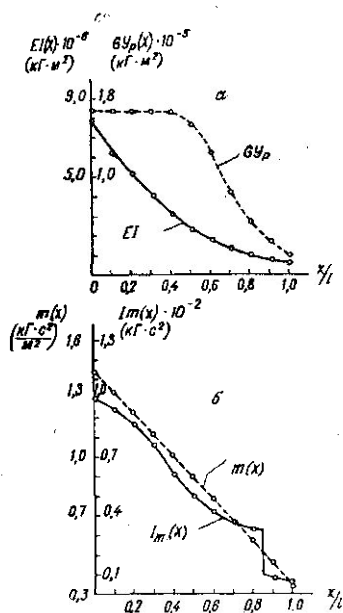


Рис. 2

Если же значения параметров ω и V , установленные на модели, не совпадали с собственным значением задачи (3) и (3'), то определитель системы (4) не равнялся нулю и система имела только тривиальные решения, удовлетворяющие (3'). Однако, взяв только первые две строчки системы (4) и оставляя $\bar{\Phi}(l)$ произвольным, можно определить граничные значения $\bar{F}(l)$ и $\bar{F}'(l)$, так, чтобы удовлетворить только условиям по изгибу (3'): $\bar{F}(0) = \bar{F}'(0) = 0$. При этом третье граничное условие (3') по кручению, конечно, не удовлетворяется $\bar{\Phi}(0) \neq 0$. Чем ближе значения параметров ω и V к собственным, тем меньше по модулю рассогласование в третьем граничном условии. На минимизации величины

$$|\bar{\Phi}(0)| = \epsilon(\omega, V/\bar{F}(0) = \bar{F}'(0) = 0)$$

и основывался поиск решения краевой задачи (3—3').

Процесс такой минимизации при практическом решении задачи (в одном из случаев) иллюстрирует рис. 1.

На рис. 1 представлена плоскость машинных параметров $k = \frac{V}{\omega h}$ и $\lambda = N_{\omega} \omega^2$ (N_{ω} — масштабный множитель частоты). Каждая точка, отмеченная на рис. 1, соответствует определенному шагу в изменении параметра $\lambda(\omega^2)$ или $k(V)$. Около каждой точки написана величина рассогласования в машинных единицах (вольтах). В качестве исходной на рис. 1 показана точка А, полученная на некотором шаге решения. Точка, соответствующая галеркинскому решению, помечена на рис. 1 буквой С. Возвратные шаги, при которых рассогласование возрастает, показаны т. е. лками. Большой пунктирный квадрат включает область, на границе которой рассогласование приблизительно одинаково и имеет порядок 0,7—1,2 В. Минимизация заканчивается в точке В, заключенной внутри заштрихованного квадрата. Попытки улучшить решение вариацией параметров внутри этого квадрата уже не давали результата и ограничивались точностью машины (комбинация серийных машин типа МНБ и ЛМУ).

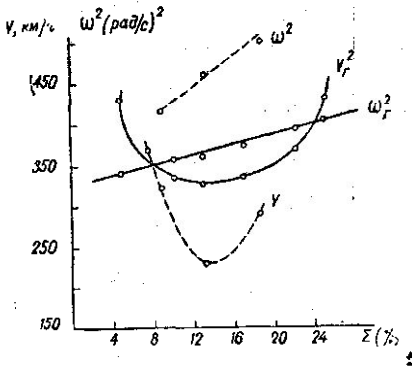


Рис. 3

В работе исследовалось некоторое гипотетическое крыло, параметры которого представлены на рис. 2. Хорда крыла h здесь полагалась постоянной.

Сначала для нескольких значений параметра массовой балансировки крыла

$$\Sigma = \frac{\int_0^l m \sigma f \varphi dx}{h \int_0^l m [f]^2 dx}$$

критические значения ω и V вычислялись по Бубнову—Галеркину. В качестве галеркинских форм $f(x)$ и $\varphi(x)$ использовались формы отдельных колебаний данного крыла в пустоте, предварительно найденные на этой же модели. Затем решалась краевая задача. Результаты решения краевой задачи и значения, вычисленные по Бубнову—Галеркину, для сравнения показаны графически на рис. 3. Сплошной линией показано галеркинское решение, пунктирной — соединены точки, полученные методом точного решения. Решение для значения параметра $\Sigma = 13,2\%$ проводилось с возможной тщательностью. Рис. 1 относится именно к этому случаю. Другие точки рис. 3 определялись менее тщательно¹, только для того, чтобы выявить характер зависимости $V_{кр}$ и $\omega_{кр}$ от массовой балансировки Σ .

Приведенные на рис. 3 решения показывают, что в практически интересной области значений массовой балансировки крыла: $\Sigma \leq 10\%$,

¹ Эти точки получились методом «нуля определителя» [4] и не уточнялись дальнейшей минимизацией.

галеркинские значения критической скорости могут быть не только меньше, но и больше, чем те, что дает решение краевой задачи.

Функции формы (2) для $\Sigma=13,2\%$, полученные по точной методике, показаны в виде осциллограмм на рис. 4. На рис. 4, а представлены действительная и мнимая части функции $\bar{F}(x) = f_1(x) + if_2(x)$.

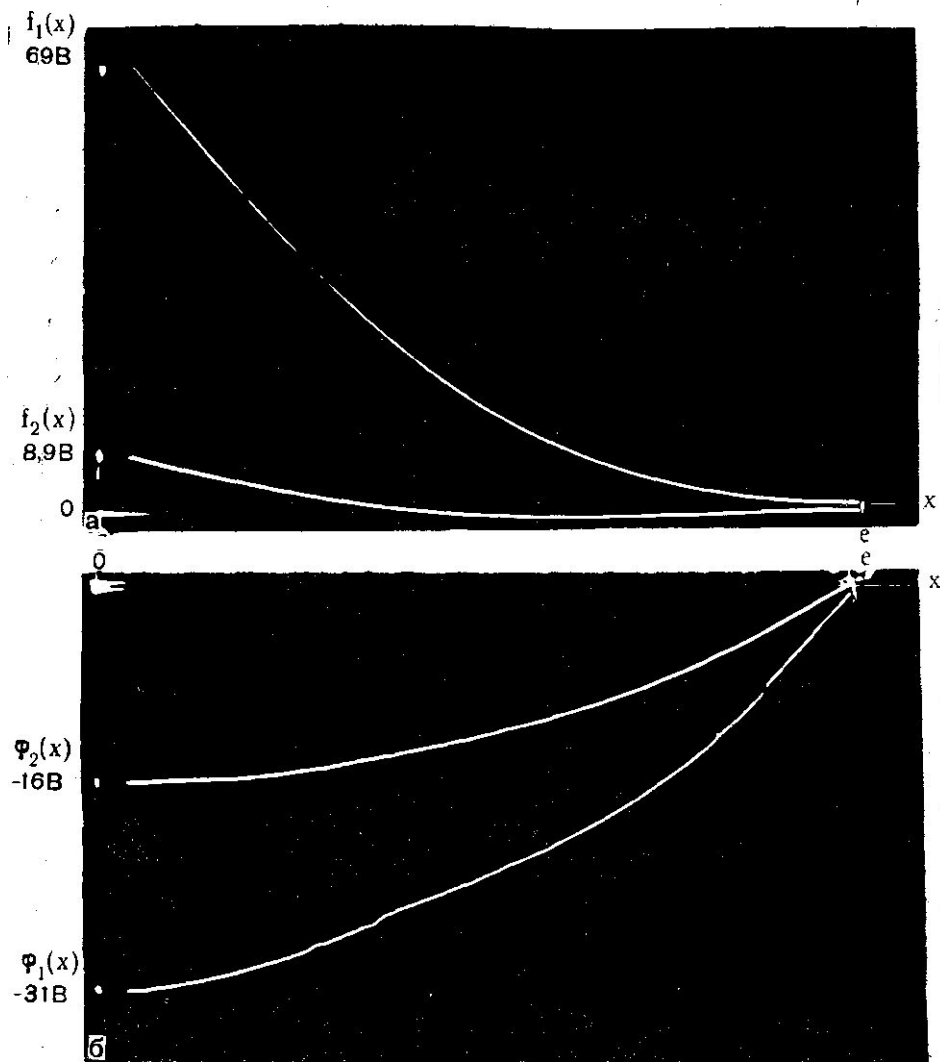


Рис. 4

На рис. 4, б — действительная и мнимая части функции кручения: $\bar{\Phi}(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$. На этих же рисунках обозначены уровни величин в вольтах, позволяющие судить о качестве сходимости решения на модели к заданным граничным условиям.

На рис. 5 показано распределение фазы колебаний изгиба и кручения по размаху крыла, определенное на основе записанных функций рис. 4.

Этот результат интересен тем, что показывает характер колебаний упругой системы в критическом режиме полета. Решение задачи (3—3') искалось в виде (2), допускающем бегущие волны изгиба и кручения. Решение, полученное на электронной модели для данного крыла, показывает, что колебания по кручению очень близки к стоячей волне — фаза этих колебаний по размаху крыла практически не меняется. В то же время изгибные колебания содержат заметную

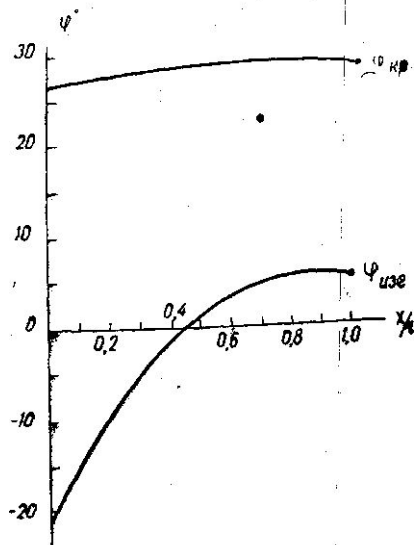


Рис. 5

е. ушу. част. — фаза колебани.. (см. рис. 5) в пределах размаха крыла монотонно меняется в интервале $\sim 30^\circ$. Это означает, что изгибная «степень свободы» непосредственно участвует в обмене энергией между различными сечениями крыла. Крутильная «степень свободы» в этом случае играет роль «основной» колебательной системы.

В заключение следует отметить, что анализ устойчивости крыла в полете, основанный на решении краевой задачи, позволил выявить детали движения упругой системы, ускользающие в методе Бубнова — Галеркина. Кроме того, в рамках принятого математического описания (1) такой подход дает возможность определить более точно значения критических величин и их зависимость от параметров системы.

При решении данной краевой задачи аналоговая модель удобно сочеталась с простейшей цифровой машиной. Основные дифференциальные уравнения решала аналоговая модель, а вспомогательную алгебраическую часть — цифровая. При этом сохранялась простота и наглядность решений, свойственная аналоговым моделям, и снимались трудности, связанные с громоздкими алгебраическими операциями.

Правда, в данном эксперименте взаимодействие цифровой и аналоговой частей установки не было автоматизировано, что и составляло главный фактор в балансе времени. Если исключить этот фактор, то для оценки времени одного шага итерации следует учесть шесть «пробных» решений и одно контрольное по 12,5 с каждое. Запись в конце каждого пробного решения значений шести функций на цифровом вольтметре со скоростью 2 отсчета в секунду, плюс 60 с на ручные манипуляции по пуску решения, переключению начальных условий, значений собственных параметров. В итоге на один шаг итерации затраты времени составляли 150 с, т. е. 2,5 мин. Эту цифру можно сократить лишь на современных быстродействующих моделях. При автоматическом взаимодействии цифровая часть, по-видимому, не увеличит эту цифру.

Точность, с которой удалось определить собственные значения на данной аналоговой установке (это была комбинация двух серийных аналоговых моделей: МНБ и ЛМУ выпуска 1962 г.), оказалась не выше 3%, сократить эту цифру, по-видимому, можно (при удачном масштабировании) на машинах — аналогах более высокого класса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гроссман Е. П. Курс вибраций частей самолета. М., 1940.
2. Этерман И. И. Математические машины непрерывного действия. М., 1957.
3. Пухов Г. Е., Гроздев Г. И., Верлань А. Ф. Методы решения краевых задач на электронных моделях. Киев, 1965.
4. Ланда П. С., Пономарев Ю. В., Стрелков С. П. «Механика твердого тела», № 3, 1967.

Поступила в редакцию
26.6 1973 г.

Кафедра
общей физики
для мехмата

