Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1975

УДК 251.61

Ю. Х. ЖАГАР

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

В работе исследуется влияние случайных ошибок наблюдений ИСЗ (фотографических или лазерных) на точность вычисления элементов орбиты и влияние случайных ошибок элементов орбиты на точность прогнозирования движения ИСЗ. Приводится метод линейной параметризации элементов орбиты, позволяющий уточнять эфемериды ИСЗ в случае, когда элементы орбиты известны с большой погрешностью. Анализируются результаты расчетов на ЭВМ, полученные согласно изложенной методике.

На точность прогнозирования движения искусственных спутников Земли наряду с возмущениями оказывают влияния случайные ошибки наблюдений. Возмущения почти всегда поддаются теоретическому учету, и поэтому расхождения между наблюдаемыми и эфемеридными положениями ИСЗ можно объяснить неточными значениями элементов орбиты. Элементы орбиты ИСЗ, в свою очередь, вычисляются по наблюдениям ИСЗ, и их неточность обусловлена случайными ошибками наблюдений. В какой степени и как случайные ошибки наблюдений ИСЗ влияют на точность вычисления эфемерид, показано в [1].

Вопросы, возникающие при оценке точности прогнозирования движения ИСЗ, мы и рассмотрим в данной статье.

Влияние случайных ошибок наблюдений ИСЗ на точность вычисления элементов орбиты

Пусть имеются приближенные значения элементов орбиты $э_j$ ($j=1, 2, ..., 6$), где $э_1 \equiv a$ — большая полуось орбиты, $э_2 \equiv e$ — эксцентриситет орбиты и т. д.

Пусть также имеются наблюдения ИСЗ t_i, α_i, δ_i, ρ_i ($i=1, 2, ..., N$), где t_i — момент наблюдений, α_i — топоцентрическое прямое восхождение ИСЗ, δ_i — топоцентрическое склонение ИСЗ, ρ_i — наклонная дальность ИСЗ.

Используя наблюдения ИСЗ, необходимо вычислить поправки к элементам орбиты $\overline{\Delta э_j}$ и оценить их точность, которую можно характеризовать корреляционной матрицей случайных величин $\Delta э_j$ (тут $\overline{\Delta э_j}$— математическое ожидание от $\Delta э_i$).

Применение метода дифференциального исправления для улучшения элементов орбиты всегда приводит к решению линейного матричного уравнения, которое имеет вид

$$\tilde{D}\times\begin{Vmatrix}\overline{\Delta\, э_1}\\ \overline{\Delta\, э_2}\\ \vdots\\ \overline{\Delta\, э_6}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\Delta l_1\\ \Delta l_2\\ \vdots\\ \Delta l_6\end{Vmatrix}, \tag{1}$$

где $\tilde{D}$ — квадратная матрица 6-го порядка, элементы которой зависят только от элементов орбиты ИСЗ и моментов наблюдений. Правые части Δl_j зависят от элементов орбиты и наблюдений ИСЗ.

Решение матричного уравнения (1) относительно $\overline{\Delta э_j}$ возможно в том случае, если определитель

$$D=\det(\tilde{D})=\begin{vmatrix}d_{11} & d_{12}, \ldots, d_{16}\\ d_{21} & d_{22}, \ldots, d_{26}\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ d_{61} & d_{62}, \ldots, d_{66}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{2}$$

Однако элементы определителя d_{ij} имеют определенные погрешности, и, следовательно, сам определитель D известен с некоторой ошибкой. Отметим, что это всегда так, потому что вычисления производятся с конечным числом знаков. В первом приближении погрешность определителя D равна

$$\Delta D=\sum_{\{i,j\}}\left|\frac{\partial D}{\partial d_{ij}}\Delta d_{ij}\right|,$$

где Δd_{ij} — погрешность элемента d_{ij}, но

$$\frac{\partial D}{\partial d_{ij}}=(-1)^{i+j}\cdot D_{ij},$$

где D_{ij} — минор определителя D. Следовательно:

$$\Delta D=\sum_{ij}|D_{ij}\cdot\Delta d_{ij}|. \tag{3}$$

Таким образом, малость определителя D дана по сравнению с величиной ΔD, и неравенство (2) можно привести к виду

$$|D|>\Delta D. \tag{4}$$

Если неравенство (4) не выполнено, определить все поправки к элементам орбиты $\overline{\Delta э_j}$ невозможно. Неравенство (4) не выполняется, т. е. ранг матрицы $\tilde{D}$ следует считать меньше шести: при эксцентриситете орбиты $e=0$ и при наклоне орбиты $i=0$. В этих случаях элемент орбиты ω (долгота перицентра) целесообразно считать фиксированным и улучшать оставшиеся элементы орбиты.

Если (4) выполнено, то можно решить матричное уравнение (1) относительно поправок $\overline{\Delta э_j}$ к элементам орбиты:

$$\overline{\Delta\, э_j}=\frac{D_j}{D}, \tag{5}$$

а также вычислить корреляционную матрицу величин $\Delta Э_j$:

$$k_{jk} = (-1)^{j+k} \frac{D_{jk}}{D} \sigma_0^2 \tag{6}$$

где, согласно [3], дисперсия на единицу веса равна

$$\sigma_0^2 = \frac{\bar{s}}{N-M}, \tag{7}$$

N — число условных уравнений, M — число нормальных уравнений,

$$\bar{s} = \bar{s}_0 - \overline{\Delta s},$$

$$\bar{s}_0 = \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i^2, \tag{8}$$

$$\overline{\Delta s} = \sum_{j=1}^{6} \overline{\Delta Э}_j \Delta l_j,$$

Δx_i — невязки условных уравнений в методе дифференциального исправления элементов орбиты.

Из формул (6), (7) и (8) видно, что матрицу моментов корреляции K можно вычислить, зная матрицу $\widetilde{D}$ и невязки условных уравнений, а содержит она всю необходимую статистическую информацию о дисперсиях, весах и степени взаимной корреляции величин $\Delta э_j$. Дисперсия поправки $\Delta э_j$ согласно (6) равна

$$\sigma_{Э}{}_j^2 = k_{jj} = \frac{D_{jj}}{D} \sigma_0^2, \tag{9}$$

а вес

$$p_j = \frac{D}{D_{jj}}.$$

Влияние случайных ошибок элементов орбиты на точность прогнозирования движения (эфемериды) ИСЗ

Так как поправки к первоначальным элементам орбиты $э_j$ взаимно коррелированы (особенно это относится к элементам $M_\odot$ и ω, если $e \approx 0$, и элементам Ω и ω, если $i \approx 0$), то их независимое изменение в пределах $\pm \sigma э_j$ приводит к необоснованно большим погрешностям при вычислении эфемерид. Для выявления фактической ошибки, которая определяется ошибками наблюдений, введем новую систему элементов орбиты λ_j с поправками $\Delta\lambda_j$. Новые элементы λ_j выберем так, чтобы их корреляционная матрица имела диагональный вид. Согласно [4], квадратную матрицу K, соответствующую линейному оператору в n-мерном пространстве, можно привести к диагональному виду, если в качестве базиса выбрать собственные вектора данного оператора. Это означает, что необходимо найти 6-мерные собственные вектора η_j ($\eta_{j1}, \eta_{j2}, \ldots, \eta_{j6}$) из матричного уравнения

$$(K - \mu_j E) \times \left\| \begin{matrix} \eta_{j1} \\ \eta_{j2} \\ \vdots \\ \eta_{j6} \end{matrix} \right\| = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, 6) \tag{10}$$

где собственные значения μ_j определяются из характеристического уравнения

$$\det \| K - \mu E \| = 0 \tag{11}$$

(E — единичная матрица). Для однозначного определения собственных векторов η_j из (10) на них следует еще наложить условие нормировки

$$\sum_{i=1}^{6} \eta_{ji}^2 = 1.$$

Таким образом можем вычислить 6 векторов нового базиса, соответствующих шести собственным значениям μ_j. Преобразование старого базиса в новый осуществляется матрицей

$$N = \begin{Vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12}, \dots, \eta_{16} \\ \eta_{21} & \eta_{22}, \dots, \eta_{26} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \eta_{61} & \eta_{62}, \dots, \eta_{66} \end{Vmatrix}, \tag{12}$$

поэтому новые элементы орбиты связаны со старыми соотношением

$$\begin{Vmatrix} \overline{\Delta \lambda_1} \\ \overline{\Delta \lambda_2} \\ \vdots \\ \overline{\Delta \lambda_6} \end{Vmatrix} = N \times \begin{Vmatrix} \overline{\Delta э_1} \\ \overline{\Delta э_2} \\ \vdots \\ \overline{\Delta э_6} \end{Vmatrix} \tag{13}$$

а корреляционную матрицу $\widetilde{K}$ величин $\Delta\lambda_j$ можно найти по формуле

$$\widetilde{K} = N \times K \times N^{-1}. \tag{14}$$

На практике (так как матрица K является симметричной) удобно вместо решения уравнения (10) использовать метод вращения. При этом диагонализацию матрицы K следует осуществлять специальным образом до тех пор, пока

$$\max_{i \neq j} r_{ij} = \max_{i \neq j} \frac{|k_{ij}|}{\sqrt{k_{ii} \cdot k_{jj}}} < \varepsilon, \tag{15}$$

т. е. максимальный коэффициент (!) корреляции r_{ij} станет меньше заранее заданного критерия ε.

Зная матрицу N и наивероятнейшие значения поправок к элементам орбиты $\overline{\Delta э_j}$, можем по формуле (13) вычислить наивероятнейшие значения поправок $\Delta\lambda_j$, которые, согласно изложенному, являются взаимно некоррелированными.

Придавая поправкам $\Delta\lambda_j$ их всевозможные значения

$$\Delta\lambda_j \ni [\overline{\Delta\lambda}_j - 3\sigma_{\lambda j}, \ \overline{\Delta\lambda}_j + 3\sigma_{\lambda j}],$$

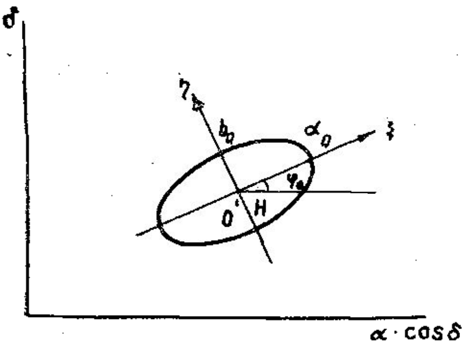
где $\sigma_{\lambda j}$ определяются из матрицы $\widetilde{K}$, можем исследовать изменение эфемеридного положения ИСЗ на небесной сфере. Влияние поправок $\Delta\lambda_j$ на эфемеридное положение ИСЗ можно характеризовать векторами влияния $\mathbf{M}_j (M_j^{(\alpha)}, \ M_j^{(\delta)})$, где

$$M_j^{(\alpha)} = 3\sigma_{\lambda j}\,\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda_j}\cos\delta,$$
$$M_j^{(\delta)} = 3\sigma_{\lambda j}\,\frac{\partial\delta}{\partial\lambda_j}. \qquad (16)$$

Применение формул дифференциального исправления элементов орбит дает следующие формулы для вычисления векторов влияния:

$$M_j^{(\alpha)} = \frac{3\sigma_{\lambda j}}{\rho}\sum_{i=1}^{6} c_{1i}\cdot\eta_{ji},$$
$$M_j^{(\delta)} = \frac{3\sigma_{\lambda j}}{\rho}\sum_{i=1}^{6} c_{2i}\cdot\eta_{ji}, \qquad (17)$$

где ρ — наклонная дальность ИСЗ в эфемеридной точке, η_{ji} — элементы матрицы N, c_{ji} — коэффициенты условных уравнений для дифференциального исправления элементов орбиты, вычисленные на эфемеридный момент.



Введем на небесной сфере единичный вектор $\mathbf{f}$ с началом в эфемеридной точке O', для которой $\Delta\lambda_j=\Delta\bar{\lambda}_j$, и образующий угол $\varphi+\pi/2$ меридианом эфемеридной точки O'. Тогда можно исследовать область всевозможных эфемеридных положений ИСЗ на небесной сфере (на рис. область H), проектируя суммарный вектор влияния на вектор $\mathbf{f}$. Введем следующие функции угла φ:

$$a(\varphi) = \sum_{j=1}^{6} |\,proj_{\mathbf{f}}\,\mathbf{M}_j\,|,$$
$$b(\varphi) = a(\varphi+\pi/2), \qquad (18)$$

которые можно преобразовать к виду

$$a(\varphi) = \sum_{j=1}^{6} |\,M_j^{(\alpha)}\cos\varphi + M_j^{(\delta)}\sin\varphi\,|,$$
$$b(\varphi) = \sum_{j=1}^{6} |\,M_j^{(\alpha)}\sin\varphi - M_j^{(\delta)}\cos\varphi\,|. \qquad (19)$$

Вводя по углу φ сетку $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$, можно вычислить отношение $a(\varphi)/b(\varphi)$ и определить характеризующие величины a_0, b_0, φ_0 из условий

$$\frac{a(\varphi_0)}{b(\varphi_0)} = \max_{\varphi}\frac{a(\varphi)}{b(\varphi)}, \qquad (20)$$
$$a_0 = a(\varphi_0), \quad b_0 = b(\varphi_0).$$

Величина a_0 — характеризует длину области H на небесной сфере, b_0 — характеризует ширину этой области, а φ_0 — характеризует ориентацию по отношению к эфемеридному меридиану.

Введем вдоль области H ось координат ξ с центром в точке O' $(\Delta\lambda_j = \overline{\Delta\lambda_j})$. Тогда перемещение точки в области H по оси ξ в пределах $[-a_0, +a_0]$ соответствует линейному изменению элементов орбиты

$$\Delta\lambda_j = \overline{\Delta\lambda}_j + 3\sigma_{\lambda j} s_j \frac{\xi}{a_0}, \tag{21}$$

где

$$s_j = \operatorname{sign}(M_j^{(\alpha)} \cos\varphi_0 + M_j^{(\delta)} \sin\varphi_0).$$

На практике можем улучшать элементы орбиты до тех пор, пока $\overline{\Delta\lambda}_j = 0$. Тогда, вводя нормированный параметр $\nu = \xi/a_0$, вместо (21) имеем соотношение

$$\Delta\lambda_j = Y_j \nu, \tag{22}$$

где

$$Y_j = 3\sigma_{\lambda j} s_j.$$

Такие же формулы справедливы и для первоначальных элементов орбиты $э_j$:

$$\Delta э_j = Z_j \nu, \tag{23}$$

где

$$Z_j = \sum_{i=1}^{6} \eta_{ij} Y_i.$$

Тем самым, если отношение b_0/a_0 существенно меньше единицы, можем считать, что всевозможные эфемеридные положения ИСЗ образуют отрезок прямой на небесной сфере. Это, путем введения параметра ν, создает возможности построить так называемую «барьерную эфемериду», которая обеспечивает попадание ИСЗ в поле зрения наблюдательного прибора даже при использовании неточных элементов орбиты. О возможности осуществления параметризации можно судить по отношению b_0/a_0 и по самой величине b_0, которая должна быть меньше поля зрения поискового прибора. Применение формул (23) для определения области всевозможных эфемеридных положений ИСЗ в дальнейшем будем называть методом линейной параметризации элементов орбиты ИСЗ.

Результаты численных расчетов

На основе изложенных соображений были составлены две программы на алгоритмическом языке Алгол-60 для ЭВМ БЭСМ-4. Первая из них улучшала элементы орбиты ИСЗ по фотографическим наблюдениям и вычисляла корреляционную матрицу полученных поправок. Вторая вычисляла характеристики области всевозможных эфемеридных положений ИСЗ и осуществляла параметризацию элементов орбиты.

Для улучшения элементов орбиты были отобраны три спутникограммы ИСЗ «Мидас-4», полученные 7 июля 1971 г. на станции наблюдений Хелуан (АРЕ). 32 наблюденных положения ИСЗ охватили 15° геоцентрической дуги. Однако улучшить все шесть элементов орбиты не оказалось возможным, так как значения величин D и ΔD для неравенства (4) были следующими:

$$D = 0{,}927 \text{ и } \Delta D = 14{,}133.$$

Фиксация аргумента перицентра ω значительно изменила отношение $\Delta D/D$:

$$D = 10665906 \quad \text{и } \Delta D = 446,$$

что позволило однозначно определить поправки к оставшимся элементам орбиты.

Следовательно, в этом случае метод линейной параметризации применим, если имеется априорная информация относительно величины аргумента перицентра ω. В общем случае нельзя пренебрегать ошибками, которые могут возникнуть из-за фиксации неверного значения ω, так как эксцентриситет орбиты далеко не всегда равен нулю. (Для ИСЗ «Мидас-4» $e=0.01281$.)

Анализ корреляционных матриц показал, что в случае $\omega = fix$ выделяются две группы элементов орбиты: a, e, M_0 и i, Ω. Взаимная корреляция элементов каждой группы очень сильная ($\eta_{ij} \approx 99\%$), в то время как элементы разных групп слабо коррелируют один с другим ($r_{ij} \approx 18\%$). При попытках улучшить все шесть элементов орбиты обнаружилась очень сильная корреляция между всеми элементами орбиты.

Прогнозируемые положения ИСЗ вычислялись для той же станции наблюдений Хелуан. Они показали, что области всевозможных положений ИСЗ на небесной сфере имеют ясно выраженную вытянутую вдоль трассы ИСЗ форму. Численные данные для кульминаций ИСЗ в ряде витков приведены в таблице.

№ витка	Высота кульминации ИСЗ над горизонтом	a_0 (град. дуги)	$\frac{a_0}{b_0}$
0	80,0	0,02	28,2
9	62,1	3,81	150,0
26	82,4	11,80	144,0

Номер витка орбиты отсчитывается от момента тех наблюдений, которые использовались для улучшения элементов.

Расчеты показали, что b_0 намного меньше увеличивается со временем по сравнению с a_0. К сожалению, они не явились достаточно точными, чтобы уверенно установить вид зависимости b_0 от времени t. Зависимость $a_0(t)$, что равносильно зависимости $a_0(N)$ (N — номер витка орбиты), является линейной функцией. Прирост a_0 на один виток орбиты составил примерно 0°.45. Приведенная методика позволила более чем в пять раз уменьшить размеры области прогнозирования по сравнению с независимым изменением элементов орбиты $э_j$ в пределах их областей изменений:

$$\Delta э_j \ni [\overline{\Delta э}_i - 3\sigma_{эj}, \quad \overline{\Delta э}_j + 3\sigma_{эj}].$$

Приведенные расчеты показали, что параметризация элементов орбиты вполне осуществима и позволит повысить надежность эфемерид ИСЗ. Это важно как для получения наблюдений ИСЗ с плохо известными элементами орбиты, так и для повышения эффективности высокоточных лазерных наблюдений. Однако методику параметризации надо усовершенствовать, чтобы учесть влияние аргумента перицентра ω даже в том случае, если неравенство (4) не выполняется.

Итак, в данной работе мы полностью пренебрегали возмущениями. Это делалось для выявления только качественных и оценочных количественных результатов метода линейной параметризации элементов орбиты. Учет возмущений не изменял бы этих результатов.

Дальнейшая разработка метода учета случайных ошибок наблюдений и возмущений при прогнозировании движения ИСЗ позволит разработать оптимальный алгоритм прогнозирования — алгоритм, который дает наиболее точные эфемеридные положения ИСЗ на небесной сфере вместе с доверительными областями этих положений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штейнс К. А., Лауцениекс Л. К. «Уч. зап. Латв. гос. ун-та», астрономия, вып. 8, 1973.
2. Жагар Ю. Х. Дипломная работа. МГУ, 1972.
3. Щиголев Б. М. Математическая обработка наблюдений. М., 1969.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1966.

Поступила в редакцию
14.6 1973 г.

Кафедра
небесной механики
и гравиметрии